Mühazirə 1

EVKLİD VƏ PSEVDO-EVKLİD FƏZALARI

1. Tutaq ki, $V - R$ həqiqi ədədlər meydanı üzərində $n-$ ölçülü vektor fəzadır, $\{\vec{e}_i\}, i=\overline{1,n}$, -bu fəzanın müəyyən bazisidir. $\forall\vec{x}\in V$ vektoru üçün $\vec{x}=x^1\vec{e}_1+\dots+x^n\vec{e}_n=x^i\vec{e}_i$ ayrılışı, digər $\{\vec{e}_{i'}\}$ bazisi üçün isə

$$\vec{e}_{i'}=A^i_{i'}\vec{e}_i$$

keçid düsturu doğrudur, burada $\left(A^i_{i'}\right)-$ keçid matrisi olub qeyri-məxsusidir, $i-$ toplama, yaxud «Eynşteyn» indeksidir. Əgər $\vec{x}$ vektorunun $\vec{x}=x^{i'}\vec{e}_{i'}$ ayrılışı da məlumdursa, onda

$$x^{i'}=A^{i'}_i x^i \tag{1}$$

çevirməsi yazılır, burada $\left(A^{i'}_i\right)-\left(A^i_{i'}\right)$ keçid matrisinin tərs matrisidir. (1) çevirməsinə vektorun *koordinatlarının çevirmə qanunu* deyilir.

2. Vektor arqumentli $\alpha: V\to R$ skalyar funksiyası:

1) $\forall\vec{x},\vec{y}\in V$ üçün

$$\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha(\vec{x})+\alpha(\vec{y});$$

2) $\forall\vec{x}\in V, \forall\lambda\in V$ üçün

$$\alpha(\lambda\vec{x})=\lambda\cdot\alpha(\vec{x})$$

şərtləri ödənildikdə *xətti funksiya* adlanır. Məsələn, $\forall\vec{x}\in V, \vec{x}=x^i\vec{e}_i$ vektoru üçün $\alpha(\vec{x})=x^1+x^2+x^3$ qaydası ilə təsir edən α funksiyası xətti funksiyadır.

V vektor fəzasında təsir edən bütün xətti funksiyalar çoxluğunu V^* ilə işarə edək. V^* çoxluğunda toplama və ədədə vurma əməlləri bu qayda ilə daxil edilir:

1) $\forall\alpha,\beta\in V^*, \forall\vec{x}\in V$ üçün

$$(\alpha+\beta)(\vec{x})=\alpha(\vec{x})+\beta(\vec{x});$$

2) $\forall\alpha\in V^*, \forall\vec{x}\in V, \forall\lambda\in R$ üçün

$$(\lambda\alpha)(\vec{x})=\lambda\cdot\alpha(\vec{x}).$$

Bu əməllər V^* çoxluğunu *kovenktor fəza* adlanan vektor fəzaya çevirirlər. V və V^* fəzaları *qoşma fəzalardır*. V^* kovektor fəzasının elementlərini *kovektorlar* adlandırırlar və $\underset{\to}{\alpha},\underset{\to}{\beta},\underset{\to}{\gamma},...$ kimi işarə olunurlar. $\forall\underset{\to}{\alpha}\in V^*$ kovektoru üçün

$$\alpha_i=\underset{\to}{\alpha}(\vec{e}_i), i=\overline{1,n}$$

ədədləri $\underset{\to}{\alpha}$ *kovektorunun* $\{\vec{e}_i\}$ *bazisində koordinatları* adlanır.

V^* kovektor fəzasının

$$\underset{\to}{e}^j(\vec{e}_i)=\delta^j_i$$

şərtini ödəyən $\left\{\underset{\to}{e}^j\right\}, j=\overline{1,n}$ bazisinə $\{\vec{e}_i\}$ bazisi ilə *qarşılıqlı (qoşma) olan bazis* deyilir, burada δ^j_i – *Kroneker simvoludur*:

$$\delta^j_i=\begin{cases}0, & j\neq i,\\ 1, & j=i.\end{cases}$$

$\underset{\to}{\alpha}$ kovektorunun $\{\vec{e}_i\}$ və $\{\vec{e}_{i'}\}$ bazislərindəki α_i və $\alpha_{i'}$ koordinatları arasında aşağıdakı əlaqə doğrudur:

$$\alpha_{i'}=\underset{\to}{\alpha}(\vec{e}_{i'})=\underset{\to}{\alpha}\left(A^i_{i'}\vec{e}_i\right)=A^i_{i'}\underset{\to}{\alpha}(\vec{e}_i)=A^i_{i'}\alpha_i,$$

və ya

$$\alpha_{i'} = A_{i'}^{i}\alpha_i. \qquad (2)$$

3. Boş olmayan hər hansı G çoxluğuna baxaq. G çoxluğunun elementlərini *nöqtələr* adlandıraq və $A, B, C, ..$ ilə işarə edək. Nəzərdə tuturuq ki, $\sigma : G \times G \to V$ inikası verilmişdir, burada $V - n$-ölçülü vektor fəzadır. $\forall A, B \in G$ nöqtələri üçün $\sigma(A, B) = \overrightarrow{AB}$ işarə edək.

Tərif. Aşağıdakı şərtlər (*afin fəza aksiomları)* ödənildikdə boş olmayan G çoxluğu V vektor fəzası üzərində $n-$*ölçülü afin fəza* adlanır və A_n ilə işarə olunur:

1) $\forall A \in G$ nöqtəsi və $\forall \vec{x} \in V$ vektoru üçün elə yeganə $B \in G$ nöqtəsi vardır ki,

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x};$$

2) $\forall A, B, C \in G$ nöqtələri üçün

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

bərabərliyi doğrudur.

V vektor fəzasına A_n afin fəzasının *yonəldicisi* deyilir.

Tərif. $O \in A_n$ nöqtəsi və V vektor fəzasının $\{\vec{e}_i\}, i = \overline{1, n}$, bazisi üçün $(O, \{e_i\})$ çoxluğuna A_n afin fəzasında *afin reperi* və ya *afin koordinat sistemi* deyilir və $O\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n$ ilə işarə olunur.

$\forall M \in A_n$ nöqtəsini götürək. $\overrightarrow{OM}$ vektoru M *nöqtəsinin radius-vektoru* adlanır. $\overrightarrow{OM}$ vektorunu $\{\vec{e}_i\}$ bazisi üzrə ayıraq:

$$\overrightarrow{OM} = x^1\vec{e}_1 + \cdots + x^n e_n.$$

$x^1, x^2, ..., x^n$ ayrılış əmsallarına M nöqtəsinin *afin koordinatları* deyilir.

4. Müsbət-müəyyən g bixətti formasının təyin olunduğu $n-$ölçülü V vektor fəzasına $n-$*ölçülü Evklid vektor fəzası* deyilir. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ vektorları üçün $g(\vec{x}, \vec{y})$ ədədi $\vec{x}$ və $\vec{y}$ vektorlarının *skalyar hasili* adlanır və $\vec{x} \cdot \vec{y}$ ilə işarə olunur. Skalyar hasil əməlinin aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

1^0. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x};$

2^0. $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z};$

3^0. $(\alpha\vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y});$

4^0. Əgər $\vec{x} \neq 0$ olarsa, onda $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0.$

$\vec{x} \cdot \vec{x} = \vec{x}^2$ ədədi $\vec{x}$ vektorunun skalyar kvadratı adlanır. 4^0 xassəsindən alınır ki, istənilən $\vec{x}$ vektoru üçün $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$, yəni $\sqrt{\vec{x}^2}$ -həqiqi ədəddir. Bu ədəd $\vec{x}$ vektorunun *uzunluğu* və ya *norması* adlanır və $|\vec{x}|$ ilə işarə olunur. $|\vec{x}| = 1$ olduqda $\vec{x}$ vekto-runa *vahid vektor* deyilir.

Asanlıqla yoxlamaq olur ki, sıfırdan fərqli ixtiyari $\vec{x}$ və $\vec{y}$ vektorları üçün

$$-1 \leq \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} \leq 1 \qquad (3)$$

bərabərsizliyi doğrudur. (3) bərabərsizliyi göstərir ki, sıfırdan fərqli $\vec{x}$ və $\vec{y}$ vektorları üçün $[0, \pi]$ ədədi aralığında

$$\cos\alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

bərabərliyini ödəyən α ədədi vardır. Bu ədəd $\vec{x}$ və $\vec{y}$ *vektorları arasındakı bucaq* adlanır və $(\vec{x}, \vec{y})$ ilə işarə olunur. Sıfırdan fərqli $\vec{x}$ və $\vec{y}$ vektorları $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ şərtini ödədikdə *perpendikulyar* (yaxud *ortoqonal*) vektorlar adlanırlar. Nəzərdə tutulur ki, sıfır vektor istənilən vektora perpendikulyardır.

Tərif. Bütün vektorları vahid və cüt-cüt perpendikulyar olan , yəni $|\vec{e}_i| = 1, \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, i \neq j \; (i, j = 1,2,...,n)$ şərtlərini ödəyən $\{\vec{e}_i\}$ bazisinə *ortonormallaşmış bazis* deyilir.

Əgər $\vec{x}$ və $\vec{y}$ vektorları ortonormallaşmış $\{\vec{e}_i\}$ bazisində $\vec{x}(x^1 x^2,..., x^n), \vec{y}(y^1, y^2,..., y^n)$ koordinatları ilə verilərsə, onda

$$\vec{x}\vec{y} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \cdots + x^n y^n,$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^n)^2},$$

$$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{x^1 y^1 + \cdots + x^n y^n}{\sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2}\sqrt{(y^1)^2 + \cdots + (y^n)^2}}.$$

5. V $n-$ölçülü Evklid vektor fəzası olduqda bu vektor fəza üzərində qurulan A_n afin fəzasına *$n-$ölçülü Evklid fəzası* deyilir. $n-$ölçülü Evklid fəzası E_n ilə işarə olunur. A_n afin fəzasından fərqli olaq, E_n Evklid fəzası vektorların skalyar hasil aksiomlarından alınan metrik xarakterli xassələrə malikdir. Bu xassələrin öyrənilməsi üçün daha çox düzbucaqlı koordinat sistemindən istifadə olunur.

Tərif. $\{\vec{e}_i\}$ ortonormallaşmış bazis olduqda $O\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n$ koordinat sisteminə E_n Evklid fəzasında *düzbucaqlı dekart* (və ya sadəcə *düzbucaqlı*) *koordinat sistemi* deyilir.

Tərif. $A, B \in E_n$ nöqtələri üçün $\overrightarrow{AB}$ vektorunun uzunluğu A və B nöqtələri arasındakı *məsafə* adlanır və $\rho(A, B)$ ilə işarə olunur:

$$\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}|. \tag{4}$$

(4) məsafə düsturundan alınır ki, düzbucaqlı koordinat sistemində $A(x^1,..., x^n), B(y^1,..., y^n)$ koordinatları ilə verilən A və B nöqtələri arasındakı məsafə aşağıdakı ifadəyə malikdir:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(y^1 - x^1)^2 + \cdots + (y^n - x^n)^2}.$$

$\forall M \in E_n$ nöqtəsinə götürək. $r > 0$ ədədi üçün M nöqtəsinin r *radiuslu açıq ətrafı* və ya mərkəzi M nöqtəsində olan r *radiuslu açıq kürə* aşağıdakı kimi təyin olunan çoxluğa deyilir:

$$A(M, r) = \{N / N \in E_n, \rho(M, N) < r\}.$$

Tutaq ki, $U \subset E_n$ altçoxluğunun $M \in U$ nöqtəsinin $A(M, r) \subset U$ şərtini ödəyən müəyyən $A(M, r)$ açıq ətrafı vardır. Bu halda M nöqtəsi U çoxluğunun *daxili nöqtəsi* adlanır. Hər bir nöqtəsi daxili nöqtə olan U çoxluğu E_n Evklid fəzasında *açıq çoxluq* və ya *oblast* adlanır.

Fərz edək ki, $x^1, x^2,..., x^n$ -$U \subset E_n$ oblastında düzbu-caqlı koordinatlardır. Diferensiallanan $y^1(x^1, x^2,..., x^n)$, $y^2(x^1, x^2,..., x^n), \ldots, y^n(x^1, x^2,..., x^n)$ funksiyalarını təyin edək. Bu funksiyalara müəyyən $f : U \to E_n$ inikası uyğundur.

$$df = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \frac{\partial y^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

matrisi f inikasının *Yakobi matrisi* , bu matrisin $J(f)$ deter-minantı isə onun *yakobyanı* adlanır.

Tərif. U oblastının hər bir nöqtəsində $J(f)\neq 0$ şərti ödənildikdə, diferensiallanan

$$y^1\left(x^1,x^2,...,x^n\right),\ y^2\left(x^1,x^2,...,x^n\right),\dots,y^n\left(x^1,x^2,...,x^n\right)$$

funksiyalar sisteminə U oblastında *requlyar* və ya *əyrixətli koordinat sistemi* deyilir.

Fərz edək ki, U oblastında ixtiyari iki $x^1(P),x^2(P),...,x^n(P)$ və $z^1(P),z^2(P),...,z^n(P)$ əyrixətli koor-dinat sistemləri daxil edilmişdir, burada $P\in U$. Bu koordinat sistemlərinə müəyyən $f:U\to A\subset E^n$ və $g:U\to B\subset E^n$ inikasları uyğundur, burada A və B oblastlardır. Bu halda P nöqtəsinin $\{x^i(P)\}$ koordinatlarına onun $\{z^i(P)\}$ koordinatlarını qarşı qoyan $\psi_{x,z}:A\to B$,yəni $\psi_{x,z}:x^i(P)\to z^i(P), 1\le i\le n$, inikası təyin olunur. $\psi_{x,z}$ inikasına U oblastında *koordinatların əvəz olunması* deyilir. Göstərmək olur ki, $\psi_{x,z}$ inikası A oblastının B oblastına qarşılıqlı birqiymətli, hər iki tərəfə diferensiallanan və yakobyanı sıfırdan fərqli olan inikasıdır.

Əyrixətli koordinat sistemlərinə misal göstərək. E_2 Evklid müstəvisində (r,φ) polyar koordinat sisteminin düzbu-caqlı (x,y) koordinat sistemi ilə əvəz olunma funksiyalarına baxaq: $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$ Bu əvəz olunmanın $J(\psi)$ yakobyanını təyin edək. Hesablamaqla müəyyən edirik ki,

$$d\psi=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix};\ J(\psi)=r.$$

Göründüyü kimi, yakobyan koordinat başlanğıcında sıfra çevrilir. Polyar koordinat sisteminin əyrixətli koordinat sistemi olduğu U oblastı kimi, $E_2(r,\varphi)$ müstəvisində $0<\varphi<2\pi, 0<r<\infty$ bərabərsizlikləri ilə təyin olunan sonsuz zolaq götürülür. Onda $E_2(x,y)$ müstəvisində A oblastı kimi, $x\ge 0, y=0$ şüasının kənar edildiyi bütün müstəvini götürmək olar.

Mühazirə 2

TENZORLAR VƏ ONLAR ÜZƏRİNDƏ ƏMƏLLƏR

1. Tutaq ki, $V-R$ həqiqi ədədlər meydanı üzərində $n-$ölçülü vektor fəzadır, V^* isə V vektor fəzasına qoşma olan kovektor fəzadır. q sayda $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_q\in V$ vektor və p sayda $\underset{\to}{\eta}^1,\dots,\underset{\to}{\eta}^p\in V^*$ kovektor arqumentlərindən asılı olan skalyar

$$z=t\left(\vec{v}_1,...,\vec{v}_q,\underset{\to}{\eta}^1,...,\underset{\to}{\eta}^p\right) \tag{1}$$

funksiyasını təyin edək. (1) funksiyası arqumentlərinin hər birinə nəzərən xəttilik şərtlərini ödədikdə *polixətti funksiya* adlanır. Məsələn, 1-ci vektor arqumentinə görə xəttilik şərtləri belə yazılır:

$$t\left(\vec{v}_1'+\vec{v}_1'',\vec{v}_2,...,\vec{v}_q,\underset{\to}{\eta}^1,...,\underset{\to}{\eta}^p\right)=t\left(\vec{v}_1',\vec{v}_2,...,\vec{v}_q,\underset{\to}{\eta}^1,...,\underset{\to}{\eta}^p\right)+$$
$$+t\left(\vec{v}_1'',\vec{v}_2,...,\vec{v}_q,\underset{\to}{\eta}^1,...,\underset{\to}{\eta}^p\right),$$
$$t\left(k\cdot\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_q,\underset{\to}{\eta}^1,...,\underset{\to}{\eta}^p\right)=k\cdot t\left(\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_q,\underset{\to}{\eta}^1,...,\underset{\to}{\eta}^p\right).$$

(1) polixətti funksiyasına həmçinin V vektor fəzası üzərində tipi (p,q) olan ($p\ge 0, q\ge 0$), yaxud p dəfə kontravariant və q dəfə kovariant *tenzor* deyilir. $s=p+q$ ədədi tenzorun valentliyi adlanır. Məsələn, valentliyi 2 olan tenzorlar $(2,0),(0,2)$ və $(1,1)$ tipli tenzorlardır. Tenzorlara dair nümunələrə baxaq.

1) (1,0) tipli $t\left(\underset{\to}{\eta}\right)$ tenzoru V vektor fəzasının vektorudur.

2) (0,1) tipli $t(\vec{v}_1)$ tenzoru V^* kovektor fəzasının kovektorudur.

3) (1,1) tipli tenzor $t(\vec{v}, \underrightarrow{\eta})$ polixətti funksiyası ilə verilir və *afinor* adlanır.

V vektor fəzası üzərində təyin olunan bütün (p,q) tipli tenzorlar çoxluğu $T_q^p V$ ilə işarə olunur.

2. Tenzorlar üzərində aparılan əməlləri qeyd edək.

1^0. $t_1, t_2 \in T_q^p V - V$ vektor fəzası üzərində verilmiş tenzorlardırsa, onda bu tenzorların $t_1 + t_2$ *cəmi*

$$(t_1 + t_2)(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_q, \underrightarrow{\eta}^1, ..., \underrightarrow{\eta}^p) = t_1(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_q, \underrightarrow{\eta}^1, ..., \underrightarrow{\eta}^p) + \\ + t_2(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_q, \underrightarrow{\eta}^1, ..., \underrightarrow{\eta}^p)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q \in V$, $\underrightarrow{\eta}^1, \ldots, \underrightarrow{\eta}^p \in V^*$.

Qeyd. Yalnız eyni tipli tenzorları toplamaq mümkündür.

2^0. $t \in T_q^p V - V$ vektor fəzası üzərində verilmiş tenzor, k ixtiyari həqiqi ədəddirsə, onda t tenzorunun k ədədinə $k \cdot t$ *hasili*

$$(k \cdot t)(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_q, \underrightarrow{\eta}^1, ..., \underrightarrow{\eta}^p) = k \cdot t(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_q, \underrightarrow{\eta}^1, ..., \underrightarrow{\eta}^p)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q \in V$, $\underrightarrow{\eta}^1, \ldots, \underrightarrow{\eta}^p \in V^*$.

Göründüyü kimi, tenzorun ədədə hasili zamanı tip dəyişmir. Asanlıqla yoxlamaq olur ki, $T_q^p V$ çoxluğu (p,q) tipli tenzorların toplanması və ədədə hasili əməllərinə görə vektor fəza təyin edir.

3^0. $t_1 \in T_{q_1}^{p_1} V$, $t_2 \in T_{q_2}^{p_2} V - V$ vektor fəzası üzərində verilmiş tenzorlardırsa, onda bu tenzorların $t_1 \otimes t_2$ *hasili*

$$(t_1 \otimes t_2)(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{q_1} \vec{v}_{q_1+1}, ..., \vec{v}_{q_1+q_2}, \underrightarrow{\eta}^1, ..., \underrightarrow{\eta}^{p_1}, \underrightarrow{\eta}^{p_1+1}, ..., \underrightarrow{\eta}^{p_1+p_2}) = \\ = t_1(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{q_1}, \underrightarrow{\eta}^1, ..., \underrightarrow{\eta}^{p_1}) \cdot t_2(\vec{v}_{q_1+1}, ..., \vec{v}_{q_1+q_2}, \underrightarrow{\eta}^{p_1+1}, ..., \underrightarrow{\eta}^{p_1+p_2}),$$

burada $\vec{v}_a \in V, a = 1,2,...,q_1 + q_2, \underrightarrow{\eta}^b \in V^*, b = 1,2,..., p_1 + p_2$.

Göründüyü kimi, $t_1 \otimes t_2$ -$(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ tipli tenzordur.

Tenzorların hasili əməlinin aşağıdakı xassələri vardır:

$a)$ $t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3) = (t_1 \otimes t_2) \otimes t_3$;

$b)$ $(t_1 + t_2) \otimes t_3 = t_1 \otimes t_3 + t_2 \otimes t_2$;

$c)$ $(kt_1) \otimes t_2 = t_1 \otimes (kt_2) = k(t_1 \otimes t_2)$.

Qeyd. Tenzorların hasili əməli yerdəyişmə (kommutativ-lik) xassəsinə malik deyil, yəni

$$t_1 \otimes t_2 \neq t_2 \otimes t_1.$$

4^0. Tutaq ki, $t \in T_q^p V - V$ vektor fəzası üzərində verilmiş tenzordur və $p > 0, q > 0$. t tenzorunun m saylı vektor və k saylı kovektor arqumentlərinə görə *bükülməsi* dedikdə aşağıdakı kimi təyin olunan $tr_m^k t \in T_{q-1}^{p-1} V$ tenzoru başa düşülür:

$$tr_m^k t(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{q-1}, \underrightarrow{\eta}^1, ..., \underrightarrow{\eta}^{p-1}) = \\ = t(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{m-1}, \vec{e}_i, \vec{v}_{m+1}, ..., \vec{v}_{q-1}, \underrightarrow{\eta}^1, ..., \underrightarrow{\eta}^{k-1}, \underrightarrow{e}^i, \underrightarrow{\eta}^{k+1}, ..., \underrightarrow{\eta}^{p-1}),$$

burada $\{\vec{e}_i\}, i = 1,2,...,n - V$ vektor fəzasının bazisidir, $\{\underrightarrow{e}^j\}$– onunla qoşma olan bazisdir və i toplama indeksi olbuğundan bu indeksə görə cəmləmə aparılır. Aydındır ki, bükülmə əməli vektor və ya kovektor arqumentlərindən hər hansı biri qurtarana qədər ardıcıl olaraq aparıla bilər.

5^0. Tutaq ki, $S_q - q$ dərəcəli əvəzləmələr qrupudur. S_q qrupunun $T_q^0 V$ tenzorlar fəzasında təsirini

$$\forall \sigma \in S_q,\ \forall t \in T_q^0 V,\ \ \sigma t(\vec{v}_1,...,\vec{v}_q) = t(\vec{v}_{\sigma(1)},...,\vec{v}_{\sigma(q)})$$

düsturu ilə təyin edirik.

$t \in T_q^0 V$ tenzorunun *simmetrikləşməsi* dedikdə aşağıdakı kimi təyin olunan $Sym\, t \in T_q^0 V$ tenzoru başa düşülür:

$$Sym\, t = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \sigma t.$$

Məsələn, $t \in T_2^0 V$ tenzorunun simmetrikləşməsi

$$Sym\, t(\vec{v},\vec{w}) = \frac{1}{2!}\left(t(\vec{v},\vec{w}) + t(\vec{w},\vec{v})\right)$$

şəklində, $h \in T_3^0 V$ tenzorunun simmetrikləşməsi isə

$$Sym\, t(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = \frac{1}{3!}\left(h(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) + h(\vec{w},\vec{u},\vec{v}) + h(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) +\right.$$
$$\left. + h(\vec{w},\vec{v},\vec{u}) + h(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) + h(\vec{u},\vec{w},\vec{v})\right)$$

şəklində aparılır.

Qeyd edək ki, simmetrikləşmə əməli vektor və kovektor arqumentlərinin bir qrupuna da tətbiq oluna bilər. Məsələn, $t \in T_3^2 V$ tenzorunun 1-ci və 3-cü vektor arqumentlərinə görə simmetrikləşməsi belə yazılır:

$$Sym_{1,3}\, t(\vec{v},\vec{w},\vec{u},\underset{\rightarrow}{\eta},\underset{\rightarrow}{\xi}) = \frac{1}{2!}\left(t(\vec{v},\vec{w},\vec{u},\underset{\rightarrow}{\eta},\underset{\rightarrow}{\xi}) + t(\vec{u},\vec{w},\vec{v},\underset{\rightarrow}{\eta},\underset{\rightarrow}{\xi})\right).$$

Tərif. $t \in T_q^0 V$ tenzoru $\forall \sigma \in S_p$ əvəzləməsi üçün $\sigma t = t$ şərtini ödədikdə *simmetrik tenzor* adlanır. Tərifdən aydın olur ki, əgər $t \in T_q^0 V$ - simmetrik tenzordursa, onda $Sym\, t = t$. Digər tərəfdən, $t \in T_3^2 V$ tenzoru üçün $Sym_{1,3}\, t = t$ yazılışı onu göstərir ki, bu tenzor 1-ci və 3-cü vektor arqumentlərinə görə simmetrikdir.

6^0. $\sigma \in S_q$ əvəzləməsinin işarəsini $Sgn\, \sigma$ ilə işarə edək. Aydındır ki, $Sgn\, \sigma$ cüt əvəzləmələr üçün 1-ə, tək əvəzləmələr üçün isə -1-ə bərabərdir.

$t \in T_q^0 V$ tenzorunun *çəp-simmetrikləşməsi* , yaxud *alternasiyası* aşağıdakı kimi təyin olunan $Al\, t \in T_q^0 V$ tenzoru na deyilir:

$$Al\, t = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} Sgn\, \sigma(\sigma t).$$

Tərifdən görünür ki, $t \in T_2^0 V$ tenzorunun çəp-simmetrikləşməsi

$$Al\, t(\vec{v},\vec{w}) = \frac{1}{2!}\left(t(\vec{v},\vec{w}) - t(\vec{w},\vec{v})\right)$$

şəklində, $h \in T_3^0 V$ tenzorunun çəp-simmetrikləşməsi isə

$$Al\, t(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = \frac{1}{3!}\left(h(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) + h(\vec{w},\vec{u},\vec{v}) + h(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) -\right.$$
$$\left. - h(\vec{w},\vec{v},\vec{u}) - h(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) - h(\vec{u},\vec{w},\vec{v})\right)$$

şəklində aparılır.

Çəp-simmetrikləşmə əməlini də vektor və kovektor arqumentlərinin bir qrupuna tətbiq etmək mümkündür. Məsələn, $t \in T_3^2 V$ tenzorunun 2-ci və 3-cü vektor arqumentlərinə görə çəp-simmetrikləşməsi belə yazılır:

$$Al_{2,3}\, t(\vec v,\vec w,\vec u,\underset{\to}{\eta},\underset{\to}{\xi}) = \frac{1}{2!}\left(t(\vec v,\vec w,\vec u,\underset{\to}{\eta},\underset{\to}{\xi}) - t(\vec v,\vec u,\vec w,\underset{\to}{\eta},\underset{\to}{\xi})\right).$$

Tərif. $t \in T_q^0 V$ tenzoru $\forall \sigma \in S_p$ əvəzləməsi üçün $Sgn\sigma \cdot \sigma t = t$ şərtini ödədikdə *çəp-simmetrik tenzor* adlanır. Tərifə görə, əgər $t \in T_q^0 V$ - çəp-simmetrik tenzordursa, onda $Alt = t$. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, simmetrik tenzorun alternasiyası və çəp-simmetrik tenzorun simmetrikləşməsi sıfra bərabərdir.

Mühazirə 3

TENZORUN KOORDİNATLARI. METRİK TENZOR

1. Fərz edək ki, ixtiyari $t \in T_q^p V$ tenzoru verilmişdir, burada $V - n -$ölçülü vektor fəzadır. V vektor fəzasının hər hansı $\{\vec e_i\}, i = 1,2,...,n,$ bazisini götürək və bu bazislə qoşma olan bazisi $\{\underset{\to}{e}^j\}, j = 1,2,...,n,$ ilə işarə edək.

Tərif. t tenzorunun $\{\vec e_i\}$ bazisindəki koordinatları aşağıdakı qayda ilə təyin olunan ədədlər sisteminə deyilir:

$$t_{i_1 \cdots i_q}^{j_1 \cdots j_p} = t(\vec e_{i_1},...,\vec e_{i_q},\underset{\to}{e}^{j_1},...,\underset{\to}{e}^{j_p}).$$

$1 \le i_a \le n, 1 \le j_b \le n, a = 1,2,...,q, b = 1,2,...,p$ olduğuna görə $t \in T_q^p V$ tenzorunun $\{\vec e_i\}$ bazisindəki koordinatlarının sayı n^{p+q} ədədinə bərabərdir.

Bir bazisdən digərinə keçdikdə tenzorun koordinatları dəyişir. Bu dəyişmənin xarakterini müəyyən edək. Tutaq ki, V vektor fəzasının $\{\vec e_i\}$ bazisindən fərqli digər $\{\vec e_{i'}\}$ bazisi verilmişdir. $\{\vec e_{i'}\}$ bazisinin qoşma olan bazisini $\{\underset{\to}{e}^{j'}\}$ ilə işarə edək. $t \in T_q^p V$ tenzorunun $\{\vec e_{i'}\}$ bazisindəki koordinatları aşağıdakı ifadəyə malikdirlər:

$$t_{i_1' \cdots i_q'}^{j_1' \cdots j_p'} = t(\vec e_{i_1'},...,\vec e_{i_q'},\underset{\to}{e}^{j_1'},...,\underset{\to}{e}^{j_p'}). \tag{1}$$

Məlumdur ki, $\{\vec e_i\}$ bazisindən $\{\vec e_{i'}\}$ bazisinə və $\{\underset{\to}{e}^j\}$ bazisindən $\{\underset{\to}{e}^{j'}\}$ bazisinə keçid uyğun olaraq

$$\vec e_{i'} = A_{i'}^i \vec e_i, \tag{2}$$

$$\underset{\to}{e}^{j'} = A_j^{j'} \underset{\to}{e}^j \tag{3}$$

düsturları ilə verilir. (1) bərabərliyinin sağ tərəfində (2), (3) düsturlarını və xəttilik şərtlərini nəzərə alaq:

$$t_{i_1' \cdots i_q'}^{j_1' \cdots j_p'} = t\left(A_{i_1'}^{i_1}\vec e_{i_1},...,A_{i_q'}^{i_q}\vec e_{i_q}, A_{j_1}^{j_1'}\underset{\to}{e}^{j_1},...,A_{j_p}^{j_p'}\underset{\to}{e}^{j_p}\right) =$$

$$= A_{i_1'}^{i_1}\cdots A_{i_q'}^{i_q} A_{j_1}^{j_1'}\cdots A_{j_p}^{j_p'}\, t(\vec e_{i_1},...,\vec e_{i_q},\underset{\to}{e}^{j_1},...,\underset{\to}{e}^{j_p}) =$$

$$= A_{i_1'}^{i_1}\cdots A_{i_q'}^{i_q} A_{j_1}^{j_1'}\cdots A_{j_p}^{j_p'}\, t_{i_1 \cdots i_q}^{j_1 \cdots j_p},$$

və ya

$$t_{i_1' \cdots i_q'}^{j_1' \cdots j_p'} = A_{i_1'}^{i_1}\cdots A_{i_q'}^{i_q} A_{j_1}^{j_1'}\cdots A_{j_p}^{j_p'}\, t_{i_1 \cdots i_q}^{j_1 \cdots j_p}. \tag{4}$$

(4) düsturlarına bir vektor bazisindən digərinə keçdikdə (p,q) *tipli tenzorun koordinatlarının çevirmə düsturları* deyilir. (4) düsturlarından aydın olur ki, $t \in T_0^1 V$ tenzorunun koordinatları

$$t^{j'} = A_j^{j'} t^j$$

qaydası, yəni vektorun koordinatlarının çevirmə qanunu ilə (bax mühazirə 2, (1) düsturu), $t\in T_1^0V$ tenzorunun koordinatları isə

$$t_{i'}=A_{i'}^i t_i$$

qaydası, yəni kovektorun koordinatlarının çevirmə qanunu ilə (bax mühazirə 1, (2) düsturu) dəyişirlər. Buradan $(1,0)$ tipli tenzorun vektor, $(0,1)$ tipli tenzorun isə kovektor olması bilavasitə alınır.

2. Tenzorlar üzərində aparılan əməlləri koordinatlarla ifadə etmək olar:

1^0. $\forall t,h\in T_q^pV$ tenzorları üçün

$$(t+h)_{i_1\cdots i_q}^{j_1\cdots j_p}=t_{i_1\cdots i_q}^{j_1\cdots j_p}+h_{i_1\cdots i_q}^{j_1\cdots j_p};$$

2^0. $\forall t\in T_q^pV$ tenzoru və $\forall k\in R$ həqiqi ədədi üçün

$$(kt)_{i_1\cdots i_q}^{j_1\cdots j_p}=k\cdot t_{i_1\cdots i_q}^{j_1\cdots j_p};$$

3^0. $\forall t_1\in T_{q_1}^{p_1}V,\ \forall t_2\in T_{q_2}^{p_2}V$ tenzorları üçün

$$(t_1\otimes t_2)_{i_1\cdots i_{q_1}i_{q_1+1}\cdots i_{q_1+q_2}}^{j_1\cdots j_{p_1}j_{p_1+1}\cdots j_{p_1+p_2}}=t_{i_1\cdots i_{q_1}}^{j_1\cdots j_{p_1}}\cdot t_{i_{q_1+1}\cdots i_{q_1+q_2}}^{j_{p_1+1}\cdots j_{p_1+p_2}};$$

4^0. $\forall t\in T_q^pV,\ p>0, q>0$, tenzoru üçün

$$(tr_m^k t)_{i_1\cdots i_{q-1}}^{j_1\cdots j_{p-1}}=t_{i_1\cdots i_{m-1}s i_{m+1}\cdots i_{q-1}}^{j_1\cdots j_{k-1}s j_{k+1}\cdots j_{p-1}};$$

5^0. $\forall t\in T_q^0V$ tenzoru üçün

$$(Sym\,t)_{i_1\cdots i_q}=\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q}t_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(q)}}=t_{(i_1\cdots i_q)}.$$

Xüsusi halda, $\forall t\in T_2^0V$ tenzorunun simmetrikləşməsi koordi-natlarla

$$t_{(ij)}=\frac{1}{2!}(t_{ij}+t_{ji}),$$

$\forall h\in T_3^0V$ tenzorunun simmetrikləşməsi isə koordinatlarla

$$h_{(ijk)}=\frac{1}{3!}(h_{ijk}+h_{jki}+h_{kij}+h_{jik}+h_{ikj}+h_{kji})$$

şəklində ifadə olunur.

$\forall t\in T_3^2$ tenzoruna baxaq. $t_{(i|j|k)}^{lm}$ yazılışı onu göstərir ki, simmetrikləşmə əməli yalnız i və k indekslərinə tətbiq olunur:

$$t_{(i|j|k)}^{lm}=\frac{1}{2!}(t_{ijk}^{lm}+t_{kji}^{lm}).$$

6^0. $\forall t\in T_q^0V$ tenzoru üçün

$$(Al\,t)_{i_1\cdots i_q}=\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q}Sgn\sigma\cdot t_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(q)}}=t_{[i_1\cdots i_q]}.$$

Xüsusi halda, $\forall t\in T_2^0V$ tenzorunun çəp-simmetrikləşməsi koordinatlarla

$$t_{[ij]}=\frac{1}{2!}(t_{ij}-t_{ji}),$$

$\forall h\in T_3^0V$ tenzorunun çəp-simmetrikləşməsi isə koordinatlarla

$$h_{[ijk]}=\frac{1}{3!}(h_{ijk}+h_{jki}+h_{kij}-h_{jik}-h_{ikj}-h_{kji})$$

şəklində ifadə olunur.

Mühazirə 4

METRİK FƏZALAR

1. Tutaq ki, X boş olmayan çoxluqdur. Əgər aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi ilə hər bir nizamlanmış $x, y \in X$ elementlər cütünə mənfi olmayan $\rho(x, y)$ ədədi qarşı qoyulmuşdursa, bu halda deyirlər ki, X çoxluğu üzərində ρ *metrikası* verilmişdir:

1) yalnız və yalnız $x = y$ olduqda $\rho(x, y) = 0$;

2) ixtiyari $x, y \in X$ üçün $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) ixtiyari $x, y, z \in X$ üçün $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Əgər R_+ ilə mənfi olmayan həqiqi ədədlər çoxluğu işarə olunarsa, onda X çoxluğu üzərində metrikanın 1-3 xassələrini ödəyən $\rho : X \times X \to R_+$ inikası olduğunu söyləyə bilərik.

X çoxluğu üzərində verilən metrika ilə birlikdə, yəni (X, ρ) cütü *metrik fəza,* X çoxluğunun $x, y, ..., z, ...$ elementləri isə bu fəzanın *nöqtələri* adlanır. Mənfi olmayan $\rho(x, y)$ ədədi x, y nöqtələri arasındakı *məsafə* adlanır. ρ funksiyasının ödədi-yi 1-3 xassələrinə *metrik fəza aksiomları* deyilir: 1 xassəsi eynilik aksiomu, 2 xassəsi simmetriya aksiomu, 3 xassəsi isə üçbucaq aksiomu (və ya üçbucaq bərabərsizliyi adlanır. Anlaşılmazlıq yaranmadığı halda, qısa olmasından ötrü metrik fəzanı sadəcə X ilə işarə edəcəyik.

Boş olmayan istənilən X çoxluğu üzərində $x, y \in X$ üçün

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

qəbul etməklə *trivial*, yaxud *simplektik* metrika adlandırılan metrika təyin oluna bilər. Aydındır ki, metrikanın bu şəkildə təyin olunması zamanı 1-3 aksiomları ödənilir. Beləliklə, sıfırdan fərqli istənilən çoxluğu metrik fəzaya çevirmək olar. Qeyd edək ki, birdən çox nöqtəyə malik olan eyni bir çoxluq üzərində müxtəlif metrikalar verilə bilər. Doğrudan da, əgər. ρ belə bir çoxluq üzərində verilmiş metrika və k isə vahiddən fərqli müsbət ədəddirsə, onda $k\rho$ funksiyası da bu çoxluq üzərində metrikadır və bu metrika ρ metrikasından fərqlidir.

Metrik fəzalara dair nümunələrə baxaq.

Misal 1. E_n Evklid fəzası üçün ($n = 1,2,...$) aşağıdakı qayda ilə $\rho : E_n \times E_n \to R_+$ inikasını təyin edək:

$$\forall M, N \in E_n \text{ nöqtələri üçün } \rho(M, N) = \left|\overrightarrow{MN}\right|,$$

(I mühazirənin 5-ci bəndində E_n Evklid fəzasının ixtiyari iki nöqtəsi arasındakı məsafə məhz bu şəkildə təyin olunmuşdu). Daxil etdiyimiz $\rho(x, y)$ funksiyası metrik fəza aksiomlarını ödəyir. Deməli, E_n Evklid fəzası metrik fəzadır.

Misal 2. Tutaq ki, $X - [a, b]$ parçasıdır, yəni

$$[a, b] = \{x | x \in R, a \leq x \leq b\}.$$

x və y nöqtələri arasındakı məsafə $\rho(x, y) = |y - x|$ düsturu ilə təyin olunur. Bu halda metrik fəzanın 1 və 2 aksiomlarının ödənilməsi aşkardır. 3 aksiomunun ödənildiyini yoxlayaq. Əgər x_1, x_2 və x_3-X çoxluğundan olan ixtiyari üç nöqtədirsə (yəni $[a, b]$ parçasına aid olan üç ədəddirsə), onda aydındır ki, $|x_1 - x_3| = |(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3)| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|$. Beləliklə,

$$\rho(x_1, x_3) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3).$$

Misal 3. $[a,b]$ parçasında kəsilməz olan bütün həqiqi funsiyaların X çoxluğunda məsafəni $\rho(f,g)=\sup|f(x)-g(x)|$ düsturu ilə təyin edirik, burada $x\in[a,b]$. Asanlıqla yoxlamaq olur ki, ρ funksiyası metrika aksiomlarını ödəyir. Bu metrik fəza
$C_{[a,b]}$ ilə işarə olunur və daha çox riyazi analiz kursunda istifadə edilir.

2. Tutaq ki, (X,ρ)-metrik fəzadır, $Y\subset X$ onun müəyyən alt çoxluğudur. ρ metrikası ilə Y çoxluğu da metrik fəzaya çevrilir. (Y,ρ) metrik fəzası X fəzasının *alt fəzası* adlanır. Tutaq ki, $Y\subset X$ -metrik fəzanın ixtiyari alt çoxluğudur. $\{\rho(x,y)|x,y\in Y\}$ çoxluğunun dəqiq yuxarı sərhəddini nəzərdən keçirək. Əgər bu dəqiq yuxarı sərhəd sonludursa: $d=\sup\limits_{x,y\in Y}\{\rho(x,y)\}$, onda Y *məhdud* çoxluq, $d-Y$ çoxluğunun *diametri* adlanır.

$x\in X$ *mərkəzli* ε *radiuslu kürəvi ətraf*

$$O_\varepsilon(x)=\{y|\,y\in X,\rho(x,y)<\varepsilon\}$$

çoxluğuna deyilir.

$Y_1,Y_2\subset X$ *çoxluqları arasındakı məsafə* dedikdə

$$\rho(Y_1,Y_2)=\inf_{x\in X,y\in Y}\{\rho(x,y)\}$$

ədədi başa düşülür. Əgər Y_1 və Y_2 çoxluqlarının ortaq nöqtəsi vardırsa, onda $\rho(Y_1,Y_2)=0.$

$\rho(x,Y)=0$ şərtini ödəyən istənilən x nöqtəsi Y çoxluğu-nun *toxunma nöqtəsi* adlanır. Aşkardır ki, Y çoxluğunun hər bir x nöqtəsi onun toxunma nöqtəsidir. Hökmün tərsi ümumiyyətlə doğru deyil. Məsələn, $(a,b)\subset R$ intervalı üçün a və b nöqtələri toxunma nöqtələri olsalar da, bunlar (a,b) intervalına aid olmayan nöqtələrdir.

Y çoxluğunun bütün toxunma nöqtələri çoxluğu onun *qapanması* adlanır və $\overline{Y}$ ilə işarə olunur. Aşkardır ki, $Y\subset\overline{Y}$, lakin tərsi ümumiyyətlə doğru deyil. Yuxarıda baxdığımız (a,b) intervalı misalında bu çoxluğun qapanması $[a,b]$ parçasıdır.

Metrik fəzanın Y alt çoxluğu özünün qapanması ilə üst-üstə düşdükdə, yəni $Y=\overline{Y}$ şərtini ödədikdə *qapalı çoxluq* adlanır.

Əgər $x\in Y$ nöqtəsinin bu çoxluğa daxil olan müəyyən $O_\varepsilon(x)$ kürəvi ətrafı vardırsa, bu nöqtəyə Y çoxluğunun *daxili nöqtəsi* deyilir. Y çoxluğunun bütün daxili nöqtələri çoxluğu onun *daxili hissəsi* adlanır və $IntY$ ilə işarə olunur. Y çoxluğu özünün daxili hissəsi ilə üst-üstə düşdükdə, yəni $Y=IntY$ şərtini ödədikdə *açıq çoxluq* adlanır.

Teorem 1. *Tutaq ki, $X-$metrik fəzadır. $Y\subset X$ çoxluğu yalnız və yalnız $X\setminus Y$ tamamlayıcı çoxluğu açıq olduqda qapalıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, Y -qapalı çoxluqdur, $Y=\overline{Y}$ və $x\in X\setminus Y$. Bu o deməkdir ki, x nöqtəsi Y çoxluğunun toxunma nöqtəsi deyil, yəni $\rho(x,Y)=\varepsilon>0$. Göstərək ki, $O_\varepsilon(x)\subset X\setminus Y$. Doğrudan da, ixtiyari $y\in O_\varepsilon(x)$ nöqtəsi üçün $\rho(x,y)<\varepsilon$. Əgər $y\in Y$ olduğunu fərz etsək, $\rho(x,y)\geq\rho(x,Y)$, yəni $\rho(x,y)\geq\varepsilon$ münasibətini alarıq, bu isə şərtə ziddir. Beləliklə, $X\setminus Y$ açıq çoxluqdur.

Tərsinə, tutaq ki, $X\setminus Y$-açıq çoxluqdur. Onda ixtiyari $x\in X\setminus Y$ nöqtəsinin $X\setminus Y$ çoxluğuna daxil olan $O_\varepsilon(x)$ kürəvi ətrafı vardır. Bu onu göstərir ki, $y\in Y$ nöqtəsi üçün $\rho(x,y)\geq\varepsilon$, yəni $\rho(x,Y)\geq\varepsilon$. Buradan alınır ki, x nöqtəsi Y çoxluğunun toxunma nöqtəsi deyil. Beləliklə, əgər $x\in\overline{Y}$ olarsa, onda $x\notin X\setminus Y$, yəni $x\in Y$. Bu o deməkdir ki, $\overline{Y}\subset Y$, yəni $Y=\overline{Y}$. Deməli, Y qapalı çoxluqdur.

■ **Mühazirə 5**

TOPOLOJİ FƏZALAR

1. Metrik fəzada açıq çoxluqların IV mühazirədə ifadə olunan xassələrinə (teorem 2) əsaslanaraq, topoloji fəza anlayışını daxil edək.

Tutaq ki, X çoxluğunda müəyyən qayda ilə aşağıdakı xassələrə malik olan τ alt çoxluqlar sistemi seçilmişdir:

I. $\varnothing$ boş çoxluğu və X çoxluğunun özü τ sisteminə daxildirlər.

II. τ sistemindən olan alt çoxluqların istənilən ailəsinin birləşməsi τ sisteminə daxildir.

III. τ sistemindən olan alt çoxluqların istənilən sonlu ailəsinin kəsişməsi τ sisteminə daxildir.

Bu halda deyirlər ki, X çoxluğu üzərində *topoloji struktur* (və ya *topologiya*) təyin olunmuşdur. (X,τ) cütünü isə *topoloji fəza* adlandırırlar. I,II,III xassələrinə *topoloji struktur aksiomları* deyilir.

X çoxluğunun elementləri (X,τ) topoloji fəzasının *nöqtələri*, τ sistemindən olan elementlər isə bu fəzanın *açıq çoxluqları* adlanır. Əgər X çoxluğu üzərində hansı τ topologiyasının seçildiyi artıq məlumdursa, onda (X,τ) topoloji fəzasını X ilə də işarə edirlər.

Topoloji fəzalara dair nümunələrə baxaq.

Misal 1. (X,ρ) metrik fəzasını nəzərdən keçirək. IV mühazirədə verilən teorem 2-dən müəyyən edirik ki, (X,ρ) metrik fəzası topoloji fəzadır. Bu topoloji fəzanın τ topologiyası açıq kürələrin köməyi ilə verilir (IV mühazirədə, bənd 2-də (X,ρ) fəzasında açıq çoxluğun tərifinə baxın) və ρ metrikasının *doğurduğu* topologiya adlanır.

Misal 2. R^n arifmetik fəzasında açıq çoxluq anlayışını bu şəkildə daxil etmək olar. n sayda $(a^i,b^i)(i=1,2,...,n)$ intervallarını götürək. $a^i < x^i < b^i$ $(i=1,2,...,n)$ şərtini ödəyən bütün $M(x^1,x^2,...,x^n)$ nöqtələri çoxluğunu açıq koordinat paralelepipedi adlandıraq.

Əgər $F \subset R^n$ çoxluğu hər bir nöqtəsi ilə bərabər öu nöqtəni özündə saxlayan müəyyən açıq koordinat parale-lepipedini də özündə saxlayırsa, onda bu çoxluğu açıq çoxluq adlandırırıq. $\varnothing$ çoxluğu açıq çoxluq qəbul edirik. Asanlıqla yoxlamaq olur ki, bu qayda ilə təyin edilən bütün açıq çoxluqlar ailəsi topoloji strukturun I,II və III aksiomlarını ödəyir və deməli, R^n çoxluğu üzərində müəyyən topologiya təyin edir. Bu topologiyanı *təbii topologiya* adlandırırlar. Təbii topologiya R^n çoxluğunu topoloji fəzaya çevirir. Bu topoloji fəza *ədədi fəza* ($n=1$ olduqda *ədəd düz xətti*) adlanır.

Misal 3. A_2 afin müstəvisində $ABCD = P$ paraleloqra-mına baxaq. $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}, 0<\alpha<1, \quad 0<\beta<1$ şərtini ödəyən bütün M nöqtələrinin $\overset{\circ}{P}$ çoxluğu P paraleloqramının daxili hissəsi adlanır. Əgər $F \subset A_2$ çoxluğunu hər bir nöqtəsi ilə bərabər bu nöqtəni özündə saxlayan müəyyən paraleloqramın daxili hissəsini də özündə saxlayırsa, onda bu çoxluğu açıq çoxluq adlandıraq. Tərifə görə hər bir $M \in F$ nöqtəsi üçün elə P paraleloqramı vardır ki, onun $\overset{\circ}{P}$ daxili hissəsi $M \in \overset{\circ}{P} \subset F$ şərtini ödəyir.

Yoxlamaq olur ki, bu qayda ilə A_2 müstəvisində təyin edilən açıq çoxluqların τ ailəsi topoloji strukturun I,II və III aksiomlarını ödəyir. Beləliklə, afin müstəvi topoloji fəzadır. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, A_n afin fəzası topoloji fəzadır.

Misal 4. İxtiyari X çoxluğunda bu X çoxluğunun özündən və $\varnothing$ boş çoxluğundan ibarət olan $\tau = \{X,\varnothing\}$ ailəsinə baxaq. Aşkardır ki, alt çoxluqların τ ailəsi I,II və III aksiom-larını ödəyir, yəni τ - X çoxluğunda təyin edilmiş topologiyadır. Bu topologiya *antidiskret* (və ya *trivial*) *topologiya*, (X,τ) fəzası isə *antidiskret topoloji fəza* adlanır.

Misal 5. Tutaq ki, X -ixtiyari çoxluqdur, $\tau = P(X)$ isə X çoxluğunun bütün alt çoxluqları ailəsidir. I, II,III aksiom-larının ödənilməsi aşkardır. Bu topologiya *diskret topologiya*, (X,τ) fəzası isə *diskret topoloji fəza* adlanır.

4,5 misalları göstərirlər ki, istənilən X çoxluğunu topo-loji fəzaya çevirmək olar.

2. Tutaq ki, (X,τ) -topoloji fəzadır. X topoloji fəza-sında açıq çoxluqların tamamlayıcılarına *qapalı çoxluqlar* deyilir. Aşkardır ki, X topoloji fəzasında qapalı çoxluqlar üçün aşağıdakı ikili xassələr doğrudur:

I'. $\varnothing$ boş çoxluğu və X çoxluğunun özü qapalı çoxluqlardır.

II'. Qapalı çoxluqların ixtiyari ailəsinin kəsişməsi qapalı çoxluqdur.

III'. Qapalı çoxluqların ixtiyari sonlu ailəsinin birləşməsi qapalı çoxluqdur.

Bu xassələrin doğruluğu mühazirə 4-də verilən De-Morqan düsturlarından bilavasitə alınır.

Beləliklə, X çoxluğu üzərində topologiyanın verilməsi üçün açıq çoxluqlar ailəsi əvəzinə I', II', III' şərtlərini ödəyən çoxluqlar ailəsini təyin etmək və bu çoxluqları qapalı çoxluqlar adlandırmaq olar.

Topoloji fəzalarda metrik fəzalara aid olan bir sıra mühüm anlayışları daxil etmək mümkündür. X topoloji fəzasının x *nöqtəsinin ətrafı* bu nöqtəni özündə saxlayan ixtiyari açıq çoxluğa deyilir. Analogiyaya görə, Y alt çoxluğunu özündə saxlayan açıq çoxluq Y *çoxluğunun ətrafı* adlanır. $Y \subset X$ çoxluğunun *toxunma nöqtəsi* elə x nöqtəsinə deyilir ki, bu nöqtənin hər bir ətrafı Y çoxluğu ilə boş olmayan kəsişməyə malikdir. Y çoxluğunun bütün toxunma nöqtələri çoxluğu Y çoxluğunun *qapanması* adlanır və $\overline{Y}$ ilə işarə olunur. Y çoxluğu-nun *daxili nöqtəsi* elə $x \in Y$ nöqtəsinə deyilir ki, bu nöqtənin Y çoxluğuna daxil olan müəyyən ətrafı vardır. Y çoxluğunun bütün toxunma nöqtələri çoxluğu Y çoxluğunun *daxili hissəsi* adlanır və $IntY$ ilə işarə olunur.

Teorem 1. *$Y \subset X$ çoxluğu yalnız və yalnız $Y = \overline{Y}$ olduqda qapalıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, $Y -$qapalı çoxluqdur, yəni $X \setminus Y -$ açıq çoxluqdur. Onda $X \setminus Y$ çoxluğu özünün ixtiyari nöqtəsinin ətrafıdır, yəni $X \setminus Y$ çoxluğunun nöqtələri Y çoxluğunun toxunma nöqtələri olmurlar. Ona görə də $\overline{Y} \subset Y$. Digər tərəfdən, $Y \subset \overline{Y}$ olması aşkardır. Beləliklə, $Y = \overline{Y}$.

Tərsinə, tutaq ki, $Y = \overline{Y}$. Bu o deməkdir ki, əgər $x \notin Y$ olarsa, onda x nöqtəsi Y çoxluğunun toxunma nöqtəsi deyil, yəni onun müəyyən U_x ətrafı Y çoxluğu ilə kəsişmir: $U_x \subset X \setminus Y$. Buradan alınır ki, $X \setminus Y$ çoxluğu U_x açıq çoxluqlarının birləşməsi şəklində göstərilə bilər:

$$X \setminus Y = \bigcup_{x \in X \setminus Y} U_x . \tag{1}$$

(1) bərabərliyindən II topologiya aksiomuna əsasən alırıq ki, $X \setminus Y$ - açıq çoxluqdur.

Teorem 2. *X to[redacted]loji fəzasının ixtiyari Y çoxluğunun $\overline{Y}$ qapanması qapalı çoxluqdur.*

İsbatı. Teorem 1-ə əsasən, $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$ bərabərliyinin doğrulu-ğunu göstərmək yetərlidir. $\overline{Y} \subset \overline{\overline{Y}}$ olması aşkardır. $\overline{\overline{Y}} \subset \overline{Y}$ tərs daxil olmasının doğru olduğunu əsaslandıraq. Tutaq ki, $x \in \overline{\overline{Y}}$. Bu o deməkdir ki, x nöqtəsinin ixtiyari U ətrafı $\overline{Y}$ çoxluğu ilə boş olmayan kəsişməyə malikdir: $U \cap \overline{Y} \neq \varnothing$. Fərz edək ki, $y \in U \cap \overline{Y}$. Onda U çoxluğu y nöqtəsinin ətrafıdır. Digər tərəfdən, $y \in \overline{Y}$ olduğundan, U çoxluğu Y çoxluğu ilə boş olmayan kəsişməyə malikdir. Beləliklə, x nöqtəsi Y çoxluğunun toxunma nöqtəsidir, yəni $x \in \overline{Y}$. Buradan $\overline{\overline{Y}} \subset \overline{Y}$ daxil olması və
$\overline{Y} \subset \overline{\overline{Y}}$ şərti daxilində $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$ bərabərliyi alınır. ■

Mühazirə 6

KƏSİLMƏZ İNİKASLAR

Riyazi analiz kursunda ədədi arqumentli kəsilməz funksiyalar mühüm rol oynayırlar. Bu funksiyaların ümumi-ləşməsi həndəsədə əhəmiyyətli yeri olan kəsilməz inikaslardır.

1. Tutaq ki, (X,τ) və $(Y,T)-$topoloji fəzalardır. Bu topoloji fəzaların $f:X\to Y$ inikasına baxaq. Əgər $f(x_0)\in Y$ nöqtəsinin ixtiyari V ətrafı üçün $x_0\in X$ nöqtəsinin $f(U)\subset Y$ şərtini ödəyən U ətrafı vardırsa, onda deyirlər ki, f inikası $x_0\in X$ *nöqtəsində kəsilməzdir*. f inikası X fəzasının hər bir nöqtəsində kəsilməz olduqda ona *kəsilməz inikas* deyilir. Qeyd edək ki, X və Y fəzaları R ədəd düz xətti ilə üst-üstə düşdükdə kəsilməz inikasın tərifi $f(x)$ funksiyasının kəsilməzliyinin riyazi analiz kursundan məlum olan tərifi ilə eyniləşir.

Aşağıdakı teorem inikasın kəsilməzlik əlamətini ifadə edir.

Teorem 1. $f:X\to Y$ *inikası yalnız və yalnız aşağıdakı ekvivalent şərtlərdən biri ödənildikdə kəsilməzdir*:

$a)$ Y *fəzasından olan ixtiyari açıq çoxluğun proobrazı* X *fəzasında açıq çoxluqdur;*

$b)$ Y *fəzasından olan ixtiyari qapalı çoxluğun proobrazı* X *fəzasında qapalı çoxluqdur.*

İsbatı. Proobrazlar üçün $f^{-1}(Y\setminus A)=X\setminus f^{-1}(A)$ müna-sibəti ödənildiyindən, $a)$ və $b)$ şərtləri ekvivalentdir. Fərz edək ki, $f-$ kəsilməz inikasdır, $V\subset Y-$açıq çoxluqdur. Göstərək ki, V çoxluğunun $f^{-1}(V)$ proobrazı açıq çoxluqdur. Tutaq ki, $x\in X$, onda $f(x)\in V$, yəni V açıq çoxluğu $f(x)$ nöqtəsinin ətrafıdır. Onda f inikasının kəsilməzliyinin tərifinə əsasən x nöqtəsinin elə U ətrafı vardır ki, $f(U)\subset Y$, yaxud $U\subset f^{-1}(V)$. Sonuncu münasibət $f^{-1}(V)$ çoxluğunun açıq çoxluq olduğunu göstərir. Tərsinə: tutaq ki, $a)$ şərti ödənilir. İsbat edək ki, f inikası X fəzasının hər bir nöqtəsində kəsilməzdir. Hər hansı $x\in X$ nöqtəsini götürək və $f(x)$ nöqtəsinin ixtiyari V ətrafına baxaq. Şərtə görə V çoxluğunun U proobrazı $X-$də açıq çoxluqdur. Beləliklə, $x\in U$ və $f(U)\subset V$, yəni $f(x)$ nöqtəsinin ixtiyari V ətrafı üçün x nöqtəsinin $f(U)\subset Y$ şərtini ödəyən U ətrafı vardır. Tərifə görə bu, f inikasının x nöqtəsində kəsilməz olması deməkdir. ■

Kəsilməz inikaslara dair nümunələrə baxaq.

Misal 1. İxtiyari X topoloji fəzasının özünün özünə *eynilik inikası* kəsilməzdir. Bu inikas Id_X kimi işarə olunur:

$$Id_X : X\to X,\quad x\mapsto x.$$

Misal 2. Sabit inikas həmişə kəsilməzdir. Tutaq ki, $X,Y-$topoloji fəzalardır, $y_0\in Y-$müəyyən nöqtədir, f isə sabit inikasdır:

$$f:X\to Y,\quad x\mapsto y_0.$$

Onda ixtiyari $U\subset Y$ açıq çoxluğunun proobrazı, $y_0\in U$ olduqda X fəzası ilə üst-üstə düşür və əks halda $\varnothing$ olur.

Misal 3. Diskret topoloji fəzanın hər hansı topoloji fəzaya ixtiyari inikası kəsilməzdir.

Misal 4. İxtiyari topoloji fəzanın antidiskret fəzaya istənilən inikası kəsilməz inikasdır.

Teorem 2. *Kəsilməz inikasların kompozisiyası kəsilməzdir.*

İsbatı. Göstərək ki, əgər $X,Y,Z-$topoloji fəzalardırsa və $f:X\to Y$ və $g:Y\to Z$ - kəsilməz inikaslardırsa, onda bu inikasların $g\circ f:X\to Z$ kompozisiyası kəsilməzdir. $h=g\circ f$ işarə edək. Tutaq ki, $U\subset Z$-ixtiyari açıq çoxluqdur. g kəsilməz inikas olduğundan, $g^{-1}(U)$ çoxluğu $Y-$də açıqdır. $g^{-1}(U)$ çoxluğunun $f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$ proobrazı isə f inikasının kəsilməzli-yinə görə $X-$də açıqdır. $h^{-1}(U)=f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$ olduğundan buradan h kompozisiya inikasının kəsilməz olması alınır.

2. X topoloji fəzasının Y topoloji fəzasına $f:X\to Y$ inikasına baxaq. Əgər f inikası qarşılıqlı birqiymətli və qarşılıqlı kəsilməzdirsə, onda d[redacted]yirlər ki, f *homeomorfizmdir.* Bu o deməkdir ki, f inikası iki şərti ödəyir: 1) $f-$biyeksiyadır; 2) f və $f^{-1}-$kəsilməz inikaslardır. Əgər $f:X\to Y$ homeo-morfizmi vardırsa, bu halda X və Y fəzaları *homeomorf* fəzalar adlanır və $X\cong Y$, yaxud $X\cong_f Y$ yazılır.

İnikasın kəsilməzliyinidən və qarşılıqlı birqiymətliliyindən tərs inikasın kəsilməzliyi həmişə alınmır. Məsələn, $X = \{a, b\}$ və $Y = \{c, d\}$ ikinöqtəli topoloji fəzalalarına baxaq. Əgər X fəzası diskret, Y fəzası isə antidiskret fəzadırsa, onda $f : X \to Y$, $a \mapsto c, b \mapsto d$ inikası kəsilməz və biyektiv inikasdır. Lakin bu inikasın tərsi kəsilməz deyil.

Homeomorfizmlərə dair nümunələr göstərək.

Misal 5. Diskret fəzanın diskret fəzaya biyektiv inikası homeomorfizmdir. Bu aşkardır.

Misal 6. Antidiskret fəzanın antidiskret fəzaya biyektiv inikası homeomorfizmdir.

Homeomorfizmlərin sadə, lakin çox mühüm olan xassələrini qeyd edək.

Teorem 3. *a) İxtiyari topoloji fəzanın özünün özünə eynilik inikası homeomorfizmdir.*
b) Homeomorfizmin tərsi olan inikas homeomorfizmdir.
c) İki homeomorfizmin kompozisiyası homeomorfizmdir.

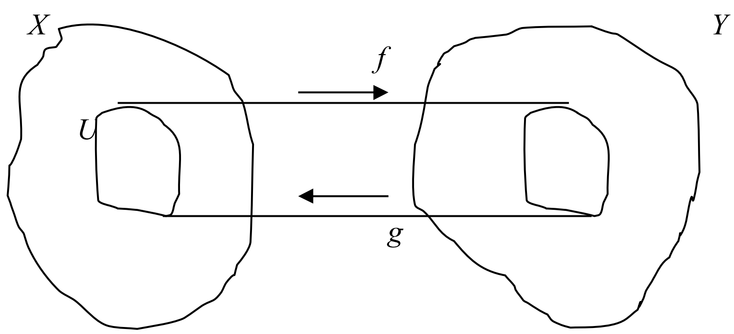
İsbatı. $a)$ və $b)$ hökmləri aşkardır. $c)$ hökmünün doğruluğunu isbat edək. Tutaq ki, $f : X \to Y$ və $g : Y \to Z$ – homeomorfizmlərdir. Onda $h = g \circ f : X \to Z$ kompozisiya inikası f və g inikaslarının kəsilməzliyinə görə kəsilməzdir (bax teorem 2). f və g biyektiv inikaslar olduqlarından, h inikası biyeksiyadır. Digər tərəfdən, f^{-1} və g^{-1} inikasları kəsilməz olduqlarından,

$$h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : Z \to X$$

tərs inikası kəsilməzdir. Beləliklə, h inikası homeomorfizmdir. $\blacksquare$

Teorem 4. *Homeomorfizm zamanı ixtiyari açıq çoxluğun obrazı açıq çoxluqdur, ixtiyari qapalı çoxluğun obrazı isə qapalı çoxluqdur.*

İsbatı. Tutaq ki, $f : X \to Y$ -homeomorfizmdir, $g = f^{-1} : Y \to X$ – tərs inikasdır və $U \subset X$ – açıq çoxluqdur. Onda $f(U) = g^{-1}(U)$ çoxluğu g inikasının kəsilməzliyinə görə açıq çoxluqdur (şək. 1).



Şəkil 1

Qapalı çoxluğun proobrazının qapalı olması oxşar şəkildə əsaslandırılır.

Teore[redacted] 4-dən məlum olur ki, $f : X \to Y$ *homeomorfizmi* X *və* Y *topoloji fəzalarının topoloji strukturları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq təyin edir.* Beləliklə, topoloji nöqteyi-nəzərdən homeomorf fəzalar tamamilə eyni şəkildə qurulmuşdurlar və $X \to Y$ homeomorfizmi X və Y fəzalarında topoloji struktur terminlərində təyin olunan bütün xassələri eyniləşdirir.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 5. *Homeomorfluq münasibəti ekvivalentlik münasibətidir.* Bundan ötrü ekvivalentlik münasibətinin tərifinə aid olan üç xassənin ödənildiyini yoxlamaq lazımdır:

$a)$ R e f l e k s i v l i k. Hər bir topoloji fəza özü-özünə homeomorfdur:

$$X \cong X.$$

$b)$ S i m m e t r i k l i k. Əgər X fəzası Y fəzasına homeomorfdursa, onda Y fəzası da X fəzasına homeomorfdur:

$$X \cong Y \Rightarrow Y \cong X.$$

$c)$ T r a n z i t i v l i k. Əgər X fəzası Y fəzasına, Y fəzası isə Z fəzasına homeomorfdursa, onda X fəzası Z fəzasına homeomorfdur:

$$X \cong Y, Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z.$$

İsbatı. Müvafiq homeorfizmləri göstərmək kifayətdir. $a)$ halında bu Id_X eynilik inikasıdır. $b)$ halında bu $f^{-1}: Y \to X$ tərs inikasıdır, burada $f: X \to Y$ - əvvəlcədən verilən homenomorfizmdir. $c)$ halında isə bu $g \circ f: X \to Z$ inikasıdır, burada $f: X \to Y$ və $g: Y \to Z-$ əvvəlcədən verilən homeo-morfizmlərdir. Bu mülahizələr simvolik şəkildə belə yazılır:

$a)$ $X \cong_{Id} X;$

$b)$ $X \cong_f Y \Rightarrow Y \cong_{f^{-1}} X;$

$c)$ $X \cong_f Y, Y \cong_g Z \Rightarrow X \cong_{g \circ f} X.$ ■

Beləliklə, bütün topoloji fəzalar homeomorfluq münasibətinə nəzərən ekvivalentlik siniflərinə ayrılırlar. Bu siniflərə, yəni $M/_{\cong}$ faktor-çoxluğunun elementlərinə *topoloji tiplər* deyilir, burada $M-$topoloji fəzalar çoxluğudur.. Yalnız və yalnız homeomorf topoloji fəzalar eyni topoloji tipə malikdirlər.

(X, τ) fəzasının homeomorfizmlər zamanı dəyişməyən xassələrinə *topoloji xassələr* (və ya *topoloji invariantlar*) deyilir. Topoloji xassələr elə xassələrdir ki, onlara homeomorf fəzalar ya malikdirlər, ya da malik deyildirlər. Məsələn, diskretlik, antidiskretlik, kompaktlıq və rabitəlilik xassələri topoloji xassələrdir. Topoloji xassələrin öyrənilməsi topologiyanın predmetini təşkil edir. XIX əsrdə, topologiyanın predmetinin hələ Evklid fəzasında çoxluqlarla məhdudlaşdığı bir vaxtda görkəmli riyaziyyatçı F.Kleyn topologiyanı həndəsənin fiqurların homeomorfizmlər zamanı dəyişməyən xassələrini öyrənən bir tərkib hissəsi kimi təyin etmişdir. Bu, topologiyanı həndəsənin digər tərkib hissələrindən olan Evklid həndəsəsi, hiperbolik həndəsə, proyektiv həndəsə, afin həndəsə və sferik həndəsə ilə bir sıraya gətirib çıxarmışdır.

3. Kəsilməz inikasların bir mühüm xüsusi halı kəsilməz funksiyalardır, yəni topoloji X fəzasının R həqiqi ədədlər çoxluğuna kəsilməz inikaslarıdır. f funksiyasının kəsilməzliyini belə ifadə etmək olar: ixtiyari $x_0 \in X$ nöqtəsi və ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün x_0 nöqtəsinin elə U ətrafı vardır ki, $y \in U$ olduqda $|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir.

Tutaq ki, $f: X \to Y-$metrik fəzaların kəsilməz inikasıdır, $\rho_1, \rho_2 - X, Y$ fəzaları üzərində metrikalardır. Onda f inikasının kəsilməzlik şərtini belə ifadə edə bilərik: ixtiyari $x_0 \in X$ nöqtəsi və ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi vardır ki, $\rho_1(x, x_0) < \delta$ bərabərsizliyindən $\rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ bərabərsizliyi alınır.

Metrik fəzalar üçün ədədi ardıcıllığın yığılması anlayışının ümumiləşdirilməsi də faydalıdır. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_0, x) = 0$ olduqda deyirlər ki, $\{x_n\}$ nöqtələr ardıcıllığı x_0 nöqtəsinə yığılır: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Fəzaların və inikasların bir çox xassələrini metrik fəzanın yığılan ardıcıllıqları terminləri ilə ifadə etmək olar. Məsələn, $Y \subset X$ çoxluğu verildikdə, əgər ixtiyari yığılan $\{x_n\}$ nöqtələr ardıcıllığı üçün $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ limiti də Y çoxluğuna aid olarsa, onda Y qapalı çoxluqdur. Metrik fəzaların $f: X \to Y$ inikasının kəsilməzlik şərtini Heyne mənada belə ifadə etmək olar: əgər $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ bərabərliyindən $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ bərabərliyi alınırsa, onda deyirlər ki, f inikası x_0 nöqtəsində kəsilməzdir.

4. Tutaq ki, X və Y topoloji fəzalardır. Yeni $X \times Y$ topoloji fəzasını təyin edək. $X \times Y$ çoxluğu X *və* Y *çoxluqlarının dekart hasilidir*:

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}.$$

$X \times Y$ çoxluğunda topologiya təyin edək. $U = \bigcup\limits_{\alpha} (V_\alpha \times W_\alpha)$ birləşməsi şəklində göstərilən $U \subset X \times Y$ çoxluğunu açıq çoxluq adlandırırıq, burada $V_\alpha \subset X, W_\alpha \subset Y-$açıq çoxluqlardır. Açıq çoxluqların xassələrinin ödənilməsi asanlıqla yoxlanılır. Bu qaydada topologiyanın daxil edildiyi $X \times Y$ çoxluğu X *və* Y *topoloji fəzalaının dekart hasili* adlanır. X və Y topoloji fəzaları $X \times Y$ dekart hasilinin *vuruqları* adlanır. Dekart hasillərin aşağıdakı xassələri doğrudur: $a)$ $X \times Y$ və $Y \times X$ fəzaları homeomorfdurlar; $b)$ $(X \times Y) \times Z$ və $X \times (Y \times Z)$ fəzaları homeomorfdurlar. Birinci halda homeomorfizm olaraq, $\varphi(x, y) = (y, x)$ şəklində təsir edən $\varphi : X \times Y \to Y \times X$ inikası götürülür. $U = \bigcup_{\alpha}(V_\alpha \times W_\alpha)$ $X \times Y$ fəzasının açıq çoxluğu olduqda, $\varphi(U) = \bigcup_{\alpha}(W_\alpha \times V_\alpha)$ - $Y \times X$ fəzasının açıq çoxluğu olur. İkinci halda homeomorfizm olaraq, $\varphi((x, y), z) = (x, (y, z))$ şəklində təsir edən $\varphi : (X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z)$ inikasını götürmək lazımdır. $X \times Y$ dekart hasilinin vuruqlardan birinin, məsələn X fəzasının üzərinə $f(x, y) = x$ şəklində təsir edən $f : X \times Y \to X$ proyeksiyası kəsilməzdir. Doğrudan da, $U \subset X$ açıq çoxluğunun proobrazı $f^{-1}(U) = U \times Y$ şəklindədir, yəni $f^{-1}(U)$ açıq çoxluqdur.

Mühazirə 7

RABİTƏLİ TOPOLOJİ FƏZALAR

1. Məlumdur ki, ixtiyari (X, τ) topoloji fəzasında qapalı çoxluq tamamlayıcısı açıq olan çoxluqdur. Aşkardır ki,

$$\varnothing = X \setminus X, X = X \setminus \varnothing. \tag{1}$$

$\varnothing$ boş çoxluğu və X çoxluğu I topologiya aksiomuna görə açıq çoxluqlardır. (1) bərabərlikləri isə göstərir ki, $\varnothing$ boş çoxluğu və X çoxluğu həm də açıq çoxluqların tamamlayıcıları kimi qapalı çoxluqlardır. Beləliklə, ixtiyari (X, τ) topoloji fəzasında $\varnothing$ və X eyni vaxtda həm açıq, həm də qapalı çoxluqlardır.

Əgər (X, τ) topoloji fəzasında $\varnothing$ boş çoxluğundan və X çoxluğundan fərqli eyni vaxtda həm açıq, həm də qapalı olan $Y \subset X$ altçoxluğu vardırsa, bu halda deyirlər ki, (X, τ) *rabitəsiz* topoloji fəzadır. Məsələn, birdən çox nöqtəsi olan istənilən diskret topoloji fəza hər bir altçoxluğu eyni vaxtda həm açıq, həm də qapalı olduğuna görə rabitəsizdir. Əgər (X, τ) rabitəsiz topoloji fəzadırsa, onda onu boş olmayan, kəsişməyən iki açıq altçoxluğun birləşməsi şəklində göstərmək olur: $X = Y \bigcup (X \setminus Y)$.

Əgər (X, τ) topoloji fəzasını boş olmayan, kəsişməyən iki açıq altçoxluğun birləşməsi şəklində göstərmək olmursa, onda deyirlər ki, (X, τ) *rabitəli topoloji fəzadır*. Aşkardır ki, istənilən antidiskret topoloji fəza rabitəlidir.

Tutaq ki, $Y \subset X$ altçoxluğu verilmişdir. Əgər Y indusirə olunmun (doğrulmuş) τ_Y topologiyasına nəzərən rabitəlidirsə, başqa sözlə, (Y, τ_Y) topoloji alt fəzası rabitəlidirsə, onda deyirlər ki, Y alt çoxluğu rabitəlidir. Aşkardır ki, antidiskret topoloji fəzada istənilən altçoxluq rabitəlidir. Digər tərəfdən, diskret topoloji fəzada ən azı iki nöqtəsi olan ixtiyari alt çoxluq rabitəsizdir.

2. Topoloji fəzaların rabitəli olduğunu müəyyən etməyə imkan verən meyarlar mövcuddur. Onlardan bir neçəsini qeyd edək.

Teorem 1. *Tutaq ki,* (X, τ) *topoloji fəzasında ixtiyari* $x, y \in X$ *nöqtələri üçün bu nöqtələri özündə saxlayan rabitəli* C_{xy} *çoxluğu vardır. Onda* $X -$ *rabitəli topoloji fəzadır.*

İsbatı. Əksini fərz edək. Tutaq ki, $X = A \bigcup B, A \bigcap B = \varnothing,$ $A, B -$ boş olmayan açıq çoxluqlardır. Onda $a \in A, b \in B$ nöqtə-ləri vardır.

$$C_{ab} = (C_{ab} \cap A) \cup (C_{ab} \cap B) \tag{2}$$

ayrılışına baxaq. a nöqtəsi $(C_{ab} \cap A)$ çoxluğuna, b nöqtəsi isə $(C_{ab} \cap B)$ çoxluğuna daxildir. Beləliklə, $(C_{ab} \cap A)$ və $(C_{ab} \cap B)$ boş olmayan çoxluqlardır, $C_{ab} -$ də açıqdırlar və kəsişmirlər. Buradan (2) ayrılışına əsasən, C_{ab} çoxluğunun rabitəsiz olması alınır. Alınmış ziddiyyət əks fərziyyənin doğru olmadığını göstərir.

■

Teorem 2. *Tutaq ki,* $X=\bigcup\limits_{\alpha} X_\alpha$, X_α *çoxluqlarından hər biri rabitəlidir və* $\bigcap\limits_{\alpha} X_\alpha \neq \varnothing$. *Onda* X *fəzası rabitəlidir.*

İsbatı. Əksini fərz edək. Tutaq ki, $X=A\bigcup B, A\bigcap B=\varnothing$, $A,B-$ boş olmayan açıq çoxluqlardır. Onda

$$X_\alpha=(X_\alpha\bigcap A)\bigcup(X_\alpha\bigcap B).$$

X_α çoxluğu rabitəli olduğundan, ya $(X_\alpha\bigcap A)=\varnothing$, ya da $(X_\alpha\bigcap B)=\varnothing$, başqa sozlə, hər bir X_α çoxluğu ya tamamilə B çoxluğunda, ya da tamamilə A çoxluğunda yerləşir. $A,B-$ boş olmayan çoxluqlar olduğuna görə, $a\in A, b\in B$ nöqtələri vardır. Fərz edək ki, $a\in X_{\alpha_o}$. Onda $X_{\alpha_o}\subset A.$ Tutaq ki, $b\in X_{\alpha_1}$, onda $X_{\alpha_1}\subset B$. Buradan müəyyən edirik ki, $X_{\alpha_o}\bigcap X_{\alpha_1}=0$. Alınmış ziddiyyət əks fərziyyənin doğru olmadığını göstərir.

Teorem 3. *İxtiyari* $[a,b]$ *parçası rabitəlidir.*

İsbatı. Əksini fərz edək. Tutaq ki, verilmiş parça, bu parçada açıq-qapalı olan iki kəsişməyən, boş olmayan çoxluğun birləşməsi şəklində göstərilmişdir: $[a,b]=A\bigcup B$. Ümumiliyi pozmadan fərz edə[redacted]i, $a\in A$. Onda A çoxluğunun açıq olmasından elə $\varepsilon>0$ ədədinin varlığı alınır ki, $[a,a+\varepsilon)\subset A$. $[a,a+\varepsilon)\subset A$ şərtinə ödəyən bütün ε ədədləri üçün $\varepsilon_0=\sup\{\varepsilon\}$ işarə edək. Onda ixtiyari $\varepsilon<\varepsilon_0$ ədədi üçün $[a,a+\varepsilon)\subset A$, yəni ixtiyari $\varepsilon<\varepsilon_0$ üçün $a+\varepsilon\in A$. Buradan A çoxluğunun qapalılığına görə, $a+\varepsilon_0\in A$ şərti alınır. ε_0 ədədi üçün yeganə mümkün hal $a+\varepsilon_0=b$ bərabərliyi ola bilər, əks halda ε_0, $\sup\{\varepsilon\}-$a bərabər olmaz. Beləliklə, $[a,b]=A$, yəni $B=\varnothing$. Alınmış ziddiyyət əks fərziyyənin doğru olmadığını göstərir, yəni $[a,b]$- rabitəli çoxluqdur.

3. Topoloji fəzanın maksimal rabitəli alt çoxluqları xüsusi əhəmiyyətə malikdirlər.

X topoloji fəzasının maksimal rabitəli alt çoxluğu *rabitəlilik komponenti* adlanır.

Teorem 4. *İki rabitəlilik komponenti ya kəsişmirlər, ya da üst-üstə düşürlər.*

İsbatı. İki kəsişən rabitəlilik komponentinin birləşməsi teorem 2-yə görə rabitəli çoxluqdur və bu komponentlərin hər ikisini özü[redacted]də saxlayır. Tərifə əsasən komponentlər bu çoxluqla və ona görə də bir-biri ilə üst-üstə düşməlidirlər.

Teorem 5. *Topoloji fəzada hər bir nö[redacted] bu fəzanın müəyyən rabitəlilik komponentində yerləşir.*

İsbatı. Qeyd etmək kifayətdir ki, verilmiş nöqtəni özündə saxlayan bütün rabitəli çoxluqlar içərisində ən böyüyü vardır: bu, bütün belə çoxluqların birləşməsi olub, teorem 2-yə görə rabitəlidir, yəni verilmiş nöqtəni özündə saxlayan rabitəlilik komponentidir.

Teorem 4 və teorem 5 birlikdə göstərirlər ki, istənilən topoloji fəza özünün cüt-cüt kəsişməyən ra[redacted]təlilik komponent-lərinin birləşməsindən ibarətdir. Başqa sözlə desək, rabitəlilik komponentləri fəzanın *bölgüsünü* əmələ gətirirlər.

4. Kəsilməz inikasın rabitəli topoloji fəzaya təsirini öyrənək.

Teorem 6. *Rabitəli topoloji fəzanın kəsilməz obrazı rabitəlidir. Başqa sözlə desək, əgər* $f:X\to Y$ *kəsilməz inikasdırsa və* X *rabitəli fəzadırsa, onda* $f(X)$ *obrazı da rabitəlidir.*

İsbatı. Əksini fərz edək. Tutaq ki, $f(X)$ obrazı rabitəsiz-dir. Onda $f(X)$-də aşağıdakı şərtləri ödəyən boş olmayan A_1,B_1 açıq çoxluqları vardır:

$$f(X)=A_1\bigcup B_1, A_1\bigcap B_1=\varnothing, \tag{3}$$

burada $A_1=A\bigcap f(X), B_1=B\bigcap f(X)$, $A,B-Y$ fəzasında açıq çoxluqlardır. A_1 və B_1 çoxluqlarının proobrazlarını uyğun olaraq, X_1 və X_2 ilə işarə edək: $X_1=f^{-1}(A_1)$ və $X_2=f^{-1}(A_2)$. f kəsilməz inikas olduğundan, X_1 və X_2 çoxluqları da açıq çoxluqlardır. (3) şərtlərini nəzərə alsaq, görərik ki, $X=X_1\bigcup X_2, X_1\bigcap X_2=\varnothing$ və X_1 , X_2 açıq çoxluqlardır. Bu isə $X-$ in rabitəli olmasına ziddir.

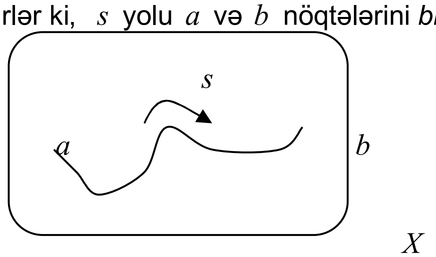
Nəticə 1. *Rabitəli fəzaya homeomorf olan topoloji fəzanın özü də rabitəlidir.Başqa sözlə desək, rabitəlilik topoloji invariant[redacted]ssədir.*

Doğrudan da, fərz edək ki, $f : X \to Y$-homeomorfizmdir və X fəzası rabitəlidir. Onda Y fəzası kəsilməz f inikası zamanı rabitəli X topoloji fəzasının obrazı kimi rabitəlidir.

5. Rabitəlilik anlayışının daxil edilməsi nə q[redacted]dər sadə olsa da, konkret hallarda, məsələn, Evklid fəzasında çoxluqların rabitəli olub-olmamasının yoxlanması çətinliklərə gətirib çıxarır. Belə hallarda daha güclü, lakin yoxlanması sadə olan topoloji xassədən-xətti rabitəlilikdən istifadə olunması məqsədəuyğundur.

İlk növbədə topoloji fəzada yol anlayışını daxil edək.

X topoloji fəzasında s *yolu* $[0,1]$ parçasının X fəzasına kəsilməz $s:[0,1] \to X$ inikasına deyilir. $a = s(0)$ nöqtəsi s yolunun *başlanğıcı,* $b = s(1)$ nöqtəsi isə *sonu* adlanır. Həmçinin deyirlər ki, s yolu a və b nöqtələrini *birləşdirir* (şək. 1).



Şəkil 1

Əgər (X, τ) topoloji fəzasının istənilən iki nöqtəsini yol vasitəsilə birləşdirmək mümkündürsə, onda deyirlər ki, X *xətti rabitəli* topoloji fəzadır.

Məsələn, R^n arifmetik fəzası xətti rabitəlidir: ixtiyari iki $a, b \in R^n$ nöqtələrini $s:[0,1] \to R^n$, $s(t) = (1-t)a + tb$ yolu vasitəsilə birləşdirmək olur.

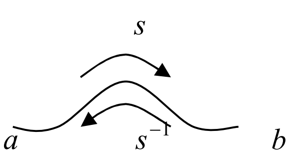
Tutaq ki, $A \subset X$ alt çoxluğu verilmişdir. Əgər (A, τ_A) topoloji alt fəzası xətti rabitəli olarsa, onda deyirlər ki, A çoxluğu *xətti rabitəlidir.* Məsələn, düz xətt üzərində istənilən interval xətti rabitəlidir.

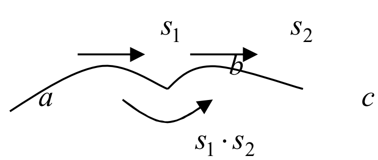
Topoloji fəzada yolların bəzi sadə xassələrini öyrənək.

Əgər s yolu a nöqtəsini b nöqtəsi ilə birləşdirirsə, onda tərsinə, b nöqtəsini də a nöqtəsi ilə birləşdirmək mümkündür. Bunu s yolunun *tərsi* ilə etmək olar. s yolunun tərsi s^{-1} kimi işarə olunur və

$$s^{-1}(t) = s(1-t)$$

düsturu ilə təyin edilir (şək. 2).





Şəkil 2 Şəkil 3

Əgər s_1 yolu a nöqtəsini b nöqtəsi ilə, s_2 yolu isə b nöqtəsini c nöqtəsi ilə birləşdirirlərsə, onda a nöqtəsini c nöqtəsi ilə birləşdirmək mümkündür. Bunu s_1 və s_2 *yollarının hasili* ilə etmək olar. s_1 və s_2 yollarının hasili $s_1 \cdot s_2$ kimi işarə olunur və

$$(s_1 \cdot s_2)(t) = \begin{cases} s_1(2t), & t \le \dfrac{1}{2} \ olduqda, \\ s_2(2t-1), & t \ge \dfrac{1}{2} \ olduqda \end{cases} \tag{3}$$

düsturu ilə təyin edilir. (3)-ə əsasən belə bir nəticəyə gəlmək olur ki, $s_1 \cdot s_2$ yolu hər birindən ikiqat sürətlə keçilən iki hissədən- s_1 və s_2 yollarından ibarətdir (şək. 3).

Teorem 7. *Ortaq nöqtəsi olan xətti rabitəli çoxluqlar ailəsinin birləşməsinin özü də xətti rabitəlidir.*

İsbatı. Tutaq ki, $(A_\alpha)_{\alpha \in I} - X$ topoloji fəzasında xətti rabitəli çoxluqların ixtiyari ailəsidir, x_0 isə bütün A_α çoxluqları üçün ortaq nöqtədir: $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ çoxluğunun xətti rabitəli olduğunu isbat etmək üçün, bu çoxluğun ixtiyari a və b nöqtələ-rini birləşdirən və həmin çoxluğa daxil olan yolun varlığını əsaslandırmaq lazımdır. Əgər müəyyən $\alpha, \beta \in I$ indeksləri üçün $a \in A_\alpha$ və $b \in A_\beta$ olarsa, onda A_α çoxluğunun xətti rabitəliliyinə görə a nöqtəsini A_α çoxluğunda x_0 nöqtəsi ilə birləşdirən s_1 yolu, A_β çoxluğunun xətti rabitəliliyinə görə isə x_0 nöqtəsini A_β çoxluğunda b nöqtəsi ilə birləşdirən s_2 yolu vardır. Onda $s_1 \cdot s_2$ yolu $A_\alpha \bigcap A_\beta \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ çoxluğunda yerləşir və a nöqtəsi ilə birləşdirir, yəni $s_1 \cdot s_2$ axtarılan yoldur.

Teorem 8. *Xətti rabitəli fəzanın kəsilməz obrazı xətti rabitəlidir. Yəni əgər $f : X \to Y -$ kəsilməz inikasdırsa və X xətti rabitəli fəzadırsa, onda $f(X)$ çoxluğu xətti rabitəlidir.*

İsbatı. Göstərək ki, ixtiyari iki a[redacted]$\in f(X)$ nöqtələrini $f(X)$ çoxluğunda yol vasitəsilə birləşdirmək mümkündür. Tutaq ki, $a = f(x), b = f(y)$, burada $x, y \in X$. Onda $X -$ də x və y nöqtələrini birləşdirən s yolu üçün $f \circ s$ yolu, aşkardır ki, $f(X) -$ də a və b nöqtələrini birləşdirir, yəni axtarılan yoldur.

Məsələn, S^2 çevrəsi $f : [0, 2\pi] \to R^2$, $f(t) = (\cos t, \mathrm{s}$[redacted]$t)$ standart parametrizasiyasında parçanın obrazı olduğuna görə xətti rabitəlidir.

Nəticə 2. *Xətti rabitəli topoloji fəzaya homeomorf olan topoloji fəzanın özü də xətti rabitəlidir. Yəni xətti rabitəlilik topoloji xassədir.*

Doğrudan da, əgər $f : X \to Y -$ xətti rabitəli X topoloji fəzasının Y topoloji fəzasının üzərinə homeomorfizmidirsə, onda Y fəzası kəsilməz f inikası zamanı xətti rabitəli X fəzasının obrazı kimi xətti rabitəlidir.

6. Rabitəlilik və xətti [redacted]abitəlilik anlayışları arasındakı əlaqəni öyrənək.

Teorem 9. *Xətti rabitəli topoloji fəza rabitəlidir*.

İsbatı. Tutaq ki, $X -$ xətti rabitəli topoloji fəzadır. X fəzasının rabitəli olduğunu əsaslandırmaq üçün teorem 1-də verilən rabitəlilik meyarından istifadə edək. Bundan ötrü ixtiyari $a, b \in X$ nöqtələrini özündə saxlayan rabitəli çoxluğu tapmaq lazımdır. Əgər $s : [0, 1] \to X - a$ və b nöqtələrini birləşdirən yoldursa, onda kəsilməz inikas zamanı rabitəli $[0, 1]$ çoxluğunun obrazı kimi rabitəli olan $s([0, 1])$ çoxluğu axtarılan çoxluqdur. Beləliklə, X fəzası rabitəlidir.

Tərs hökm ümumiyyətlə doğru deyildir: rabitəli olub, lakin xətti rabitəli olmayan fəzalar vardır. Fikrimizi əsaslandırı[redacted]aq üçün, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ düsturu ilə verilən $f : \left(0, \frac{1}{\pi}\right] \to R$ funksiyasına baxaq. Tutaq ki, $X - f(x)$ funksi-yasının qrafikinin qapanmasıdır. Onda X çoxluğu $y = \sin \frac{1}{x}$ funksiyasının qrafiki ilə şaquli $\Gamma_3 = \{(x, y) | x = 0, -1 \le y \le 1\}$ parçasının birləşməsindən ibarətdir. f funksiyasının qrafiki hər biri intervala homeomorf olan $\Gamma_1 = \{(x, y) | -\infty < x < 0, y = f(x)\}$, $\Gamma_2 = \{(x, y) | 0 < x < \infty, y = f(x)\}$ alt çoxluqlarına ayrılır. Ona görə də əgər $X = A \bigcup B, A \bigcap B = \varnothing$ olarsa və $A, B -$ boş olmayan açıq çoxluqlardırsa, onda $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ alt çoxluqlarından hər biri tamamilə ya A çoxluğunda, ya da B çoxluğunda yerləşir. Tutaq ki, $\Gamma_3 \in B$. Asanlıqla yoxlamaq olur ki, $\Gamma_3 -$ ün ixtiyari ətrafı həm Γ_1 ilə, həm də Γ_2 ilə kəsişir, yəni $\Gamma_1 \in B, \Gamma_2 \in B$. Deməli, $A = \varnothing$, bu isə fərziyyəyə ziddir. Beləliklə, X rabitəli çoxluqdur.

İndii isə göstərək ki, $X-$ xətti rabitəli deyildir. $X-$ də iki nöqtəyə baxaq: $P=\left(-\frac{1}{\pi},0\right)$ və $Q=\left(\frac{1}{\pi},0\right)$. Fərz edək ki, $f(0)=P, f(1)=Q$ şərtlərini ödəyən kəsilməz $f:[0,1]\to X$ inikası vardır. f inikası iki kəsilməz ədədi funksiyaları ilə verilir: $f(t)=(x(t),y(t)), y(t)=\sin\left(\frac{1}{x(t)}\right), x(t)\neq 0$ üçün. $x(0)=-\frac{1}{\pi}$ ol-duğundan, $x(t)=0$ şərtini ödəyən bütün $t-$lərin t_0 dəqiq aşağı sərhəddi sıfırdan böyükdür: $t_0>0$. Deməli, $[0,t_0]$ parçasında $x(t)<0, y(t)=\sin\left(\frac{1}{x(t)}\right)$ şərtləri ödənilir. $x(t)-$kəsilməz funk-siya olduğundan və $t_k\geq t_0, t_k\to t_0$ (burada $x(t_k)=0$) ardıcıllığının varlığına görə $x(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=0$. Onda $\sin\left(\frac{1}{x(t)}\right)$ funksiyasının $t\to t_0-0$ olduqda limiti yoxdur, deməli, $y(t)$ funksiyası kəsilməz deyildir. Beləliklə, X xətti rabitəli olmayan fəzadır.

Mühazirə 8

AYRILMA AKSİOMLARI

1. Aşağıda təyin edəcəyimiz T_i aksiomlarını ödəyən fəza-lar sinfini uyğun olaraq, $\mathrm{T_i}$ ilə işarə edəcəyik.

T_0 **aksiomu**: *Fəzada ixtiyari iki müxtəlif nöqtədən yalnız birinin digərini .zündə saxlamayan ətrafı vardır.*

T_0 aksiomunu ödəyən fəzaya *Kolmoqorov fəzası* və ya $\mathrm{T_0}$ *fəzası* deyilir. Məsələn, istənilən diskret fəza və hər bir metrik fəza T_0 aksiomunu ödəyir.

T_1 **aksiomu**: *Fəzada ixtiyari iki müxtəlif nöqtədən hər birinin digərini özündə saxlamayan ətrafı vardır.*

T_1 aksiomunu ödəyən fəzaya $\mathrm{T_1}$ *fəzası* deyirlər. Aşkardır ki, hər bir $\mathrm{T_1}$ fəzası eyni zamanda $\mathrm{T_0}$ fəzasıdır. Lakin bu siniflər üst-üstə düşmürlər. Məsələn, $X=\{x,y\}$ çoxluğu üzərində $\tau=\{\varnothing,X,\{x\}\}$ topologiyasını təyin etsək, (X,τ) fəzası T_1 aksi-omunu ödəməyən $\mathrm{T_0}$ fəzası olacaqdır.

T_2 **aksiomu:** *Fəzada ixtiyari iki müxtəlif nöqtənin bir-biri ilə kəsişməyən ətrafları vardır*: $\forall x,y\in X, x\neq y$ üçün $\exists U\ni x, V\ni y$ ətrafları vardır ki, $U\bigcap V=\varnothing$.

T_2 aksiomunu ödəyən fəzaya $\mathrm{T_2}$ və ya *Hausdorf fəzası* deyilir. Aşkardır ki, nöqtələrinin sayı ikidən az olmayan ixtiyari diskret fəza Hausdorf fəzasıdır. Doğrudan da, əgər X diskret fəzadırsa, onda $\forall x,y\in X, x\neq y$ nöqtələri üçün $\{x\}$ və $\{y\}$ açıq çoxluqları bu nöqtələrin kəsişməyən ətraflarıdır. İstənilən metrik M fəzası Hausdorf fəzasıdır. Əgər $x,y\in M-$müxtəlif nöqtələrdirsə, onda bu nöqtələrin kəsişməyən ətrafları olaraq $\frac{1}{2}\rho(x,y)$ radiuslu kürəvi ətraflarını götürmək olar.

T_3 **aksiomu:** *Fəzadakı ixtiyari qapalı çoxluğun və bu çoxluqda yerləşməyən istənilən nöqtənin bir-biri ilə kəsişməyən ətrafları vardır.*

Əgər topoloji fəza T_1 və T_3 aksiomlarını ödəyirsə, ona *requlyar fəza* deyirlər.

T_4 **aksiomu:** *Fəzada ixtiyari iki kəsişməyən qapalı çoxlu-ğun bir-biri ilə kəsişməyən ətrafları vardır.*

Əgər topoloji fəza T_1 və T_4 aksiomlarını ödəyirsə, ona *normal fəza* deyirlər.

2. Hausdorf topoloji fəzalarının bəzi xassələrini öyrənək.

Teorem 1. *Hausdorf X topoloji fəzasında bir nöqtəli alt çoxluqlar qapalıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, $x_0 \in X$. $\{x_0\}$ çoxluğunun qapalı olduğu-nu göstərmək üçün onun tamamlayıcı $X \setminus \{x_0\}$ çoxluğunun açıq çoxluq olduğunu yoxlamaq kifayətdir. Doğrudan da, $\forall y \in X \setminus \{x_0\}$ nöqtəsinin x_0 nöqtəsini özündə saxlamayan V ətrafı vardır (fəzanın Hausdorfluğuna əsasən). Bu o deməkdir ki, $V \subset X \setminus \{x_0\}$, yəni y daxili nöqtədir. Beləliklə, $X \setminus \{x_0\}$ – açıq çoxluqdur, deməli, $\{x_0\}$ – qapalı çoxluqdur.

Tutaq ki, topoloji X fəzasında a_1[redacted]$_2,\ldots,a_n,\ldots$ nöqtələr ardıcıllığı və müəyyən $a \in X$ nöqtəsi verilmişdir. Fərz edək ki, a nöqtəsinin ixtiyari U ətrafı üçün elə N nömrəsi vardır ki, $n > N$ olduqda $a_n \in U$. Bu halda deyirlər ki, a nöqtəsi $\{a_n\}$ ardıcıllığının *topoloji limitidir* və ya $\{a_n\}$ ardıcıllığı a nöqtəsinə *yığılır.* Məsələn, antidiskret fəzada istənilən ardıcıllıq ixtiyari nöqtəyə yığılır.

Teorem 2. *Hausdorf X fəzasında $\{a_n\}$ ardıcıllığının topoloji limiti yeganədir.*

İsbatı. Əksini fərz edək. Tutaq ki, a və b $\{a_n\}$ ardıcıllı-ğının limitləridir, U və V isə bu nöqtələrin bir-biri ilə kəsişməyən ətraflarıdır. Onda kafi qədə böyük N nömrəsi üçün $\{a_n\}$ ardıcıllığının bütün hədləri həm U, həm də V çoxluğunda yerləşərlər, bu isə $U \cap V = \varnothing$ şərtinə ziddir. ■

Teorem 3. *Hausdorf X fəzasının istənilən A alt fəzasının özü Hausdorf fəzasıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, $a, b \in A \subset X$ – iki müxtəlif nöqtələrdir. X Hausdorf fəzası olduğuna görə, a və b nöqtələrinin bir-biri ilə kəsişməyən $U, V \subset X$ ətrafları vardır. Aşkardır ki, $U \cap A$ və $V \cap A$ çoxluqları a və b nöqtələrinin A çoxluğunda ətraflarıdır və $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \varnothing$. Beləliklə, A alt fəzası Hausdorf fəzasıdır.

Bu qayda ilə topoloji fəzanın özündən onun alt fəzalarına ötürülən topoloji xassələrə *irsi xassələr* [redacted]eyilir.

Teorem 4. *Tutaq ki, X və Y Hausdorf topoloji fəzalarıdır. Onda bu fəzaların Dekart hasili və rabitəsiz cəmi Hausdorf fəzalarıdır.*

İsbatı. İki $(x_1, y_1) \in X \times Y$, $(x_2, y_2) \in X \times Y$ nöqtələrinə baxaq. Əgər bu nöqtələr müxtəlifdirlərsə, onda ya $x_1 \neq x_2$, ya da $y_1 \neq y_2$. Birinci halda X fəzasının Hausdorfluğuna görə x_1 və x_2 nöqtələrinin bir-biri ilə kəsişməyən $U(x_1)$ və $U(x_2)$ ətrafları vardır. Onda (x_1, y_1) və (x_2, y_2) nöqtələrinin $U(x_1) \times Y$ və $U(x_2) \times Y$ ətrafları da bir-biri ilə kəsişmirlər. İkinci halda isə Y fəzasının Hausdorfluğu şərtindən alınır ki, Y fəzasında kəsişmə-yən $V(y_1)$ və $V(y_2)$ ətrafları vardır. Ona görə də (x_1, y_1) və (x_2, y_2) nöqtələrinin $X \times V(y_1)$ və $X \times V(y_2)$ ətrafları bir-biri ilə kəsişmirlər.

Müxtəlif nöqtələrin $x, y \in X \cup Y$ cütünə vaxaq. Əgər nöqtələrin hər ikisi fəzalardan birində, məsələn, X fəzasında yerləşərlərsə, onda X fəzasının Hausdorfluğuna əsasən bir-biri ilə kəsişməyən $U(x)$ və $U(y)$ ətrafları vardır. Lakin $U(x)$ və $U(y)$ çoxluqları eyni zamanda $X \cup Y$ rabitəsiz cəmində açıq çoxluqlardır. Nöqtələr müxtəlif fəzalarda yerləşdikdə, məsələn, $x \in X, y \in Y$ olduqda X, Y fəzalarının özləri x və y nöqtələri-nin bir-biri ilə kəsişməyən ətrafları olur. ■

3. Normal fəzalar-topoloji fəzaların ən çox istifadə olunan siniflərindən birini təşkil edirlər. Bu sinif kifayət qədər geniş olub bütün metrik fəzaları özündə saxlayır.

Teorem 5. *İstənilən metrik fəza normaldır.*

İsbatı. Tutaq ki, X - ρ metrikası ilə metrik fəzadır, $F_1, F_2 \subset X$ – kəsişməyən qapalı çoxluqlardır. (X, ρ) metrik fəzasının Hausdorf fəza olması aşkardır. Doğrudan da, $\forall x, y \in X$, $x \neq y$ nöqtələrinin kəsişməyən ətrafları kimi elə $O_{\varepsilon_1}(x)$ və $O_{\varepsilon_2}(x)$ açıq kürəvi ətraflarını götürmək olar ki, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \rho(x,y)$ şərti ödənilmiş olsun. Tutaq ki, $x \in F_1, \varepsilon(x) = \frac{1}{3}\rho(x,F_2)$. $U_1 = \bigcup_{x \in F_1} O_{\varepsilon(x)}(x)$ işarə edək. Analoji qayda ilə $U_2 = \bigcup_{y \in F_2} O_{\varepsilon'(y)}(y)$ çoxluğunu təyin edək, burada $\varepsilon'(y) = \frac{1}{3}\rho(y,F_1)$. Beləliklə, F_1 və F_2 çoxluqlarının ətraflarını tapmış olduq. Göstərək ki, U_1, U_2 ətrafları bir-biri ilə kəsişmirlər. Əksini fərz edək: tutaq ki, $z \in U_1 \bigcap U_2$ nöqtəsi vardır. Onda müəyyən $x \in F_1$ və $y \in F_2$ nöqtələri üçün $z \in O_{\varepsilon(x)}(x)$ və $z \in O_{\varepsilon'(y)}(y)$, yəni $\rho(x,z) < \frac{1}{3}\rho(x,F_2)$, $\rho(y,z) < \frac{1}{3}\rho(y,F_1)$. Xüsusi halda, $\rho(x,z) < \frac{1}{3}\rho(x,y)$, $\rho(y,z) < \frac{1}{3}\rho(y,x)$. Sonuncu bərabərsizlikləri toplasaq, alarıq:

$$\rho(x,z) + \rho(y,z) < \frac{2}{3}\rho(x,y),$$

bu isə üçbucaq bərabərsizliyinə ziddir. ■

Topoloji X fəzasında $X = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$ şərtini ödəyən $\{U_\alpha\}$ açıq çoxluqlar sisteminə X fəzasının *açıq örtüyü* deyirlər. Topo-loji fəzaların öyrənilməsində Ortük anlayışından istifadə olunması əlverişlidir. Məsələn, əgər hər bir U_α çoxluğunda f_α funksiyası təyin olunmuşdursa, eyni zamanda hər bir $U_\alpha \bigcap U_\beta$ kəsişmə-sində f_α və f_β funksiyaları üst-üstə düşürlərsə, onda X fəzası üzərində elə yeganə kəsilməz f funksiyası vardır ki, bu funksiya hər bir U_α çoxluğunda f_α funksiyası ilə üst-üstə düşür.

Tutaq ki, X topoloji fəzasının iki açıq $\{U_\alpha\}$ və $\{V_\beta\}$ örtükləri verilmişdir. Əgər hər bir V_β çoxluğu müəyyən $U_\alpha, \alpha = \alpha(\beta)$ çoxluğunda yerləşirsə, onda deyirlər ki, $\{V_\beta\}$ *örtüyü* $\{U_\alpha\}$ *örtüyünü xırdalayır* və ya $\{V_\beta\}$ *örtüyü* $\{U_\alpha\}$ *örtüyünə nisbətən daha xırdadır.*

Teorem 6. *Tutaq ki, X – normal topoloji fəzadır, $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^{N}$ – sonlu açıq örtükdür. Onda daha xırda $\{V_\alpha\}_{\alpha=1}^{N}$ örtüyü vardır və $\overline{V_\alpha} \in U_\alpha$.*

İsbatı. U_1 çoxluğunda yerləşən qapalı $X \setminus \bigcup_{\alpha=2}^{N} U_\alpha$ çoxlu-ğuna baxaq. X fəzasının normallığına görə elə bir V_1 ətrafı vardır ki, $X \setminus \bigcup_{\alpha=2}^{N} U_\alpha \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1$. Onda $\{V_1, U_2, ..., U_N\}$ çoxluqlar sistemi X fəzasının örtüyüdyr. Eyni qayda ilə elə $V_2 \subset \overline{V_2}$ çoxluğunu təyin edə bilərik ki, $\{V_1, V_2, U_3 ..., U_N\}$ çoxluqlar sistemi X fəzasının örtüyü olar. Ardıcıl olaraq, U_k çoxluqlarını $V_k \subset \overline{V_k} \subset U_k$ çoxluqları ilə əvəz etsək, N addımdan sonra axtarılan $\{V_1, V_2, ..., V_N\}$ örtüyünü alarıq.

■

Mühazirə 9

KOMPAKT FƏZALAR

1. Kompaktlıq xassəsi toroloji fəzaların ən mühüm xassələrindən biridir. Bu xassənin həqiqi ədədlərin və eləcə də kəsilməz funksiyaların tədqiqində fundamental rolunu qeyd etmək olar.

Əgər Hausdorf X topoloji fəzasının ixtiyari $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ açıq örtüyünün (bax, VIII mühazirə, bənd 3) sonlu $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^N$ alt örtüyü vardırsa, onda deyirlər ki, X *-kompakt topoloji fəzadır*.

Nümunələrə baxaq.

1) İxtiyari antdiskret fəza kompaktdır.

2) İxtiyari sonlu topoloji fəza kompaktdır.

3) Sonlu sayda açıq çoxluqları olan ixtiyari topoloji fəza kompaktdır.

4) Sonsuz sayda nöqtələri olan diskret topoloji fəza koipakt deyil.

Tutaq ki, (X,τ) topoloji fəzasında $A\subset X$ alt çoxluğu verilmişdir. Əgər (A,τ_A) koipakt alt fəza olarsa, onda deyirlər ki, A *kompakt çoxluqdur.*

Teorem 1. *(X,τ) topoloji fəzasının A çoxluğunun kompakt olması üçün zəruri və kafi şərt onun X fəzasından olan açıq çoxluqlarla ixtiyari örtüyündən sonlu alt örtük seçməyin mümkün olmasıdır.*

İsbatı. Bu şərtin zəruriliyindən başlayaq. Tutaq ki, A çoxluğu kompaktdır, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ isə onun X fəzasında açıq olan çoxluqlardan ibarət ixtiyari örtüyüdür: $A\subset \bigcup\limits_{\alpha\in I}U_\alpha, U_\alpha\subset\tau.$ $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ örtüyündən sonlu alt örtük ayıraq. Bundan ötrü U_α çoxluqlarının A çoxluğu ilə kəsişmələrinə baxaq: $V_\alpha=U_\alpha\bigcap A$ işarə edək. V_α çoxluqları A alt fəzasında açıqdırlar və aşkardır ki, onun örtüyünü əmələ gətirirlər: $A=A\bigcap\bigcup\limits_{\alpha\in I}U_\alpha=\bigcup\limits_\alpha V_\alpha$. A çoxluğu kompakt olduğundan, $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ örtüyündən müəyyən sonlu $\{V_{\alpha_k}\}_{k=1}^N$ örtüyünü seçə bilərik. Onda aşkardır ki, $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^N - A$ çoxluğunun axtarılan alt örtüyüdür: $A=\bigcup\limits_{k=1}^N V_{\alpha_k}\subset\subset\bigcup\limits_{k=1}^N U_{\alpha_k}$.

Kafilik analoji qaydada isbat olunur. ■

Teorem 2. *Kompakt X fəzasının qapalı A alt çoxluğu kompaktdır.*

İsbatı. Göstərmək lazımdır ki, A çoxluğunun X fəzasın-dan olan açıq çoxluqlarla ixtiyari $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ örtüyündən sonlu alt örtük seçmək olar. Bundan ötrü $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ örtüyünü əmələ gətirən çoxluqlara $X\setminus A$ açıq çoxluğunu da qoşsaq, nəticədə bütün X fəzasının açıq örtüyünü alarıq. X fəzası kompakt olduğuna görə bu örtükdən sonlu alt örtük seçmək olar, belə ki, $X\setminus A$ çoxluğunun da bu alt örtüyə daxil olduğunu hesab etmək mümkündür. Tutaq ki,

$$X=\left(\bigcup_{k=1}^N U_{\alpha_k}\right)\bigcup(X\setminus A).$$

Aşkardır ki, $U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},...,U_{\alpha_N}$ çoxluqları A çoxluğunun axtarı-lan sonlu alt örtüyünü əmələ gətirirlər. ■

Qeyd edək ki, çoxluğun kompaktlığından onun qapalılığı, ümumiyyətlə desək, alınmır. Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 3. *Hausdorf X fəzasında kompakt A çoxluğu qapalıdır.*

İsbatı. Göstərək ki, $X\setminus A$ tamamlayıcısı açıq çoxluqdur. Bundan ötrü $\forall x_0\in X\setminus A$ nöqtəsinin A çoxluğu ilə kəsişməyən ətrafının varlığını əsaslandırmalıyıq. X Hausdorf fəzası olduğun-dan, hər bir $x\in A$ nöqtəsinin x_0 nöqtəsinin müəyyən V_x ətrafı ilə kəsişməyən U_x ətrafı vardır. Bütün mümkün U_x ətrafları, aşkardır ki, A çoxluğunun açıq ətrafını əmələ gətirirlər: $A\subset\bigcup\limits_{x\in A}U_x$. A çoxluğu kompakt olduğundan, $\{U_x\}$ açıq örtüyünün müəyyən sonlu alt örtüyü vardır: $A\subset U_{x_1}\bigcup\cdots\bigcup U_{x_N}$, burada $x_1,...,x_N\in A$. x_0 nöqtəsinin axtarılan ətrafı olaraq, $V_{x_1}\bigcap\cdots\bigcap V_{x_N}$ açıq çoxluğunu götürə bilərik; bu çoxluq nəinki A çoxluğu ilə, həm də $U_{x_1}\bigcup\cdots\bigcup U_{x_N}$ çoxluğu ilə kəsişmir. Doğrudan da, tutaq ki, $x\in\bigcap\limits_{k=1}^N V_{x_k}$ – ixtiyari nöqtədir. Bu nöqtə $V_{x_1},...,V_{x_N}$ çoxluqlarından hər birinə daxil olduğundan, $U_{x_1},...,U_{x_N}$ çoxluqlarından heç birinə daxil deyil. Deməli, x nöqtəsi bu çoxluqların birləşməsinə də daxil deyil. Buradan $X \setminus A$ çoxluğunun a[redacted]q olması, yaxud A çoxluğunun qapalı olması alınır.

Nəticə 1. *Metrik fəzada istənilən kompakt çoxluq qapalıdır.*

Doğrudan da, metrik fəzanın Hausdorf fəza olduğunu bilirik (bax, mühazirə 8, teorm 5-in isbatı). Buradan teorem 3-ə əsasən metrik fəzadakı hər bir kompakt çoxluğun qapalı olması alınır.

2. Kompakt fəzaların mühüm xassələrindən biri bu fəzaların normallığı ilə bağlıdır.

Teorem 4. *Kompakt topoloji fəza normaldır.*

İsbatı. Tutaq ki, $X-$kompakt fəzadır, F isə $X-$də qapalı çoxluqdur. Göstərək ki, əgər x nöqtəsi F çoxluğuna daxil deyildirsə, onda bir-biri ilə kəsişməyən $U(x)$ və $U(F)$ ətrafları vardır. $x \notin F$ olduğundan, ixtiyari $y \in F$ nöqtəsi üçün bir-biri ilə kəsişməyən $U_y \ni x$ və $V_y \ni y$ ətrafları vardır. Aşkardı r ki, $\{V_y\}$

ailəsi F çoxluğunu örtür. Teorem 3-ə görə $\{V_y\}$ örtüyünün $\{V_{y_k}\}_{k=1}^N$ sonlu alt örtüyü vardır. Ona görə də x nöqtəsinin $\bigcap_{k=1}^N U_{x_k}$ ətrafı $\bigcup_{k=1}^N V_{x_k} \supset A$ birləşməsi ilə kəsişmir.

İndi isə X fəzasında bir-biri ilə kəsişməyən qapalı F_1 və F_2 çoxluqlarına baxaq. Onda ixtiyari $x \in F_1$ nöqtəsi üçün bu nöqtənin və F_2 çoxluğunun bir-biri ilə kəsişməyən $U_x \ni x$ və $V_x \supset F_2$ ətrafları vardır. $\{U_x\}$ çoxluqlar ailəsi qapalı F_1 çoxluğunu örtür, ona görə də sonlu $\{U_{x_k}\}_{k=1}^N$ alt örtüyü vardır. Buradan aydın olur ki, $\bigcup_{k=1}^N U_{x_k}$ birləşməsi F_1 çoxluğunu özündə saxlayır və F_2 çoxluğunu özündə saxlayan $\bigcap_{k=1}^N V_{x_k}$ kəsişməsi ilə kəsişmir.

■

Kəsilməz inikas zamanı kompakt fəzanın obrazına dair aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 5. *Kompakt fəzanın kəsilməz obrazı kompaktdır, yəni əgər $f: X \to Y-$kəsilməz inikasdırsa və X fəzası kompakt-dırsa, onda $f(X)$ çoxluğu da kompaktdır.*

İsbatı. Əgər açıq $U_\alpha, \alpha \in I$ çoxluqları $f(X)$ çoxluğunu örtürlərsə, onda onların proobrazları olan $f^{-1}(U_\alpha)$ çoxluqları X fəzasını örtürlər. f kəsilməz inikas olduğundan, $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$, $\alpha \in I$ örtüyü açıq örtükdür. Onda bu örtükdən sonlu alt örtük seçmək olar. Tutaq ki, $X = f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{\alpha_N})$. Onda aşkardır ki, $f(X) \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_N}$ və $U_{\alpha_k}, k = 1,...,N,$ çox-luqları $U_\alpha, \alpha \in I$ örtüyünün axtarılan sonlu alt örtüyünü əmələ gətirirlər.

■

Mühazirə 10

SKALYAR ARQUMENTLİ VEKTOR-FUNKSİYALAR

Tutaq ki, $V-$üçölçülü Evklid vektor fəzasıdır, I isə müəyyən ədədi aralıqdır. Hər bir $t \in I$ ədədinə V fəzasından olan müəyyən $\vec{v}(t)$ vektorunu qarşı qoyan qayda verildikdə deyirlər ki, I aralığında t skalyar arqumentinin $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası təyin olunmuşdur. Aydındır ki, $\vec{v}(t)$ vektorunun $|\vec{v}(t)|$ uzunluğu t dəyişəninin skalyar (ədədi qiymətlər alan) funksiyası-dır.

Tutaq ki, $\vec{v}(t)$- I aralığında təyin olunmuş vektor funksiyadır. $|\vec{v}(t)|$ funksiyası $t_0 \in I$ nöqtəsinin yaxın ətrafında sonsuz kiçik olduqda, yəni $\lim_{t \to t_0} |\vec{v}(t)| = 0$ şərti ödənildikdə, $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası t_0 nöqtəsinin yaxın ətrafında sonsuz kiçik vektor funksiya adlandırılır.

Fərz edək ki, elə sabit $\vec{a}$ vektoru vardır ki, $\vec{v}(t)-\vec{a}$ fərqi t_0 nöqtəsinin yaxın ətrafında sonsuz kiçikdir. Bu halda $\vec{a}$ vektoru $t \to t_0$ olduqda $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının limiti adlanır və $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{v}(t) = \vec{a}$ yazılır.

$t_0 \in I$ nöqtəsində $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0)$ bərabərliyi ödənildikdə deyirlər ki, $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası t_0 nöqtəsində kəsilməzdir. I aralığının hər bir nöqtəsində kəsilməz olan $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası bu aralıqda kəsilməz vektor funksiya adlanır.

Müəyyən $t \in I$ nöqtəsinə baxaq və $t -$yə elə Δt artımı verək ki, $t + \Delta t \in I$ olsun. $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$ vektorunu təyin edək. Əgər $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ limiti vardırsa, deyəcəyik ki, $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası t nöqtəsində diferensiallanandır. Bu limit $\vec{v}'(t)$, yaxud $\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ kimi işarə olunur və $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının t nöqtəsində törəməsi adlanır. $d\vec{v} = \vec{v}'(t)dt$ vektoruna $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının t nöqtəsində diferensialı deyilir. I aralığının hər bir nöqtəsində diferensiallanan $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası bu aralıqda diferensiallanan vektor funksiya adlanır.

V vektor fəzasının ortonormallaşmış $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisinə baxaq və $\vec{v}(t)$ funksiyasını bu bazis üzrə ayıraq:

$$\vec{v}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \tag{1}$$

Beləliklə, $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisinin köməyi ilə I aralığında verilmiş $x(t), y(t), z(t)$ ədədi funksiyalarını təyin edir. Bu funksiyalar $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisində koordinatları adlanır ($x(t)-$yə birinci, $y(t)-$yə ikinci, $z(t)-$yə isə üçüncü koordinat deyilir). (1) ayrılışından aydın olur ki, $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının $t_0 \in I$ nöqtəsində kəsilməz olması üçün zəruri və kafi şərt bu nöqtədə $x(t), y(t), z(t)$ funksiyalarından hər birinin kəsilməz olmasıdır. Əgər $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ sabit vektor-dursa, onda

$$|\vec{v}(t) - \vec{a}| = \sqrt{(x(t)-a_1)^2 + (y(t)-a_2)^2 + (z(t)-a_3)^2}\,. \tag{2}$$

(2) düsturundan görünür ki, $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{v}(t) = \vec{a}$ olması üçün zəruri və kafi şərt $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a_1$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = a_2$, $\lim\limits_{t \to t_0} z(t) = a_3$ olmasıdır.

Aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 1. *I aralığında* (1) *ayrılışı ilə verilmiş $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası yalnız və yalnız $x(t), y(t), z(t)$ funksiyaları diferensial-lanan olduqda diferensiallanandır və*

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \tag{3}$$

İsbatı. (1) düsturundan alınır ki, $\Delta\vec{v} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$, burada $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$, $\Delta y = y(t+\Delta t) - y(t)$, $\Delta z = z(t+\Delta t) - \; - z(t)$. Beləliklə:

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}\,. \tag{4}$$

(4) ayrılışından teoremin isbatı bilavasitə alınır. Bu ayrılışa əsasən, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ limitinin varlığı $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{dy}{dt}$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta t} = \dfrac{dz}{dt}$ limitlərinin varlığına ekvivalentdir və (3) düsturu doğrudur.

Diferensiallanan vektor funksiyalara dair nümunələrə baxaq.

1. $\vec{v}(t) = \vec{a}t + \vec{b}$, burada $\vec{a}, \vec{b}$ – sabit vektorlardır.

$\vec{v}(t)$ funksiyası bütün ədəd oxunda verilmişdir. Əgər $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisində $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarının $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ koordinatları vardırsa, onda $x(t) = a_1t + b_1$, $y(t) = a_2t + b_2$, $z(t) = a_3t + b_3$. Teorem 1-ə görə $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası diferensiallanandır və

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = \vec{a}.$$

Göründüyü kimi, $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının törəməsi sabit vektor-dur.

2. $\vec{v}(t) = (a\cos t)\vec{i} + (a\sin t)\vec{j} + (bt)\vec{k}$, burada $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -orto-normallaşmış bazisdir, a və b sabitlərdir.

Verilmiş bazisdə $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının koordinatları

$$x(t) = a\cos t,\ y(t) = a\sin t,\ z(t) = bt$$

funksiyalarıdır. Teorem 1-ə görə, $\vec{v}(t)$-diferensiallanan vektor funksiyadır və

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (-a\sin t)\vec{i} + (a\cos t)\vec{j} + b\vec{k}.$$

I aralığında diferensiallanan $\vec{v}(t), \vec{w}(t)$ vektor funksiyaları və $f(t)$ ədədi funksiyası üçün aşağıdakı diferensiallama qaydaları doğrudur:

1^0. $\frac{d}{dt}(\vec{v} + \vec{w}) = \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{w}}{dt}$;

2^0. $\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{w}}{dt}$;

3^0. $\frac{d}{dt}[\vec{v}, \vec{w}] = \left[\frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{w}\right] + \left[\vec{v}, \frac{d\vec{w}}{dt}\right]$;

4^0. $\frac{d}{dt}(f\vec{v}) = \frac{df}{dt}\vec{v} + f\frac{d\vec{v}}{dt}$.

Nümunə olaraq, 4^0 bərabərliyinin doğruluğunu göstərək. Ortonormallaşmış $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisini seçək və bu bazisdə $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının koordinatlarını $x(t), y(t), z(t)$ ilə işarə edək. Onda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisində $f(t) \cdot \vec{v}(t)$ vektor funksiyasının $f(t)x(t), f(t)y(t)$, $f(t)z(t)$ koordinatları olar. Teorem 1-ə əsasən,

$$\frac{d}{dt}(f\vec{v}) = \frac{d(fx)}{dt}\vec{i} + \frac{d(fy)}{dt}\vec{j} + \frac{d(fz)}{dt}\vec{k}.$$

Buradan, ədədi funksmyaların difereniallanması qaydala-rından istifadə etməklə, alarıq:

$$\frac{d}{dt}(f\vec{v}) = \frac{df}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + f\left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{df}{dt}\vec{v} + f\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

$1^0, 2^0$ və 3^0 bərabərliklərinin doğruluğu analoji qaydada əsaslandırılır.

Növbəti mövzuların şərhində istifadə edəcəyimiz aşağıdakı teoremi qeyd edək:

Teorem 2. *Əgər I aralığında $|\vec{v}(t)| = 1$ olarsa, onda hər bir $t \in I$ nöqtəsində $\vec{v}(t)$ vektoru bu nöqtədə hesablanan $\frac{d\vec{v}}{dt}$ törəməsinə ortoqonaldır.*

İsbatı. Şərtə görə, I aralığında $\vec{v}^2 = 1$ eyniliyi doğrudur. Bu eyniliyi t dəyişəninə görə diferensiallayaraq, 2^0 qaydasından istifadə etsək, $\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ olduğunu alarıq. Buradan görünür ki, I aralığının hər bir nöqtəsində $\vec{v}$ və $\frac{d\vec{v}}{dt}$ vektorları ortoqonaldırlar.

Qeyd. I aralığında verilmiş $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının $\frac{d\vec{v}}{dt}$ törəməsi bu aralıqda yeni vektor funksiyadır. Ona görə də, ədədi funksiyalarda olduğu kimi, yüksək tərtibli $\frac{d^2\vec{v}}{dt}, \frac{d^3\vec{v}}{dt}, ..., \frac{d^n\vec{v}}{dt}$ törə-mələri ilə bağlı anlayışları daxil etmək olar.

Mühazirə 11

XƏTT (ƏYRİ) ANLAYIŞI. HAMAR XƏTLƏR

1. Üçölçülü E_3 Evklid fəzasında *sadə xətt* dedikdə ixtiyari düz xətt, parça və ya şüa başa düşülür (burada şüa olaraq, qapalı şüa götürülür).

Sadə xətlərdən hər hansı birinə homeomorf olan $\gamma_0 \in E_3$ fiquru *elementar xətt* (və ya *elementar əyri*) adlanır. Parçaya homeomorf olan fiqura *qövs* deyilir.

Tutaq ki, bizə d düz xətti verilmişdir. Bu düz xətt üzərində hər hansı $O'\vec{i}$ koordinat sistemini daxil edək. Əgər hər bir $t \in R$ ədədinə koordinatı t olan ($\overrightarrow{O'M} = t\vec{e}$) M nöqtəsini qarşı qoysaq, biyektiv $R \to d$ inikasını alarıq. Bu inikas homeomor-fizmdir və bu inikas zamanı R ədəd oxu d düz xəttinə, (α, β) intervalı ucları olmayan parçaya (bu parçanın düz xəttə homeomorf olması aşkardır), $[\alpha, \beta]$ ədədi parçası isə AB parçasına çevrilir, burada A və B $[\alpha, \beta]$ parçasının ucları-nın obrazlarıdır. $[\alpha, \beta)$ aralığı B uc nöqtəsi olmayan AB parçasına çevrilir (belə AB parçası isə şüaya homeomorfdur).

Beləliklə, ixtiyari ədədi aralıq (yəni bütün ədəd oxu, qapalı ədədi şüa, ədədi parça, uclarından biri və ya hər ikisi olmayan ədədi parça) sadə xətlərdən birinə homeomorfdur. Homeomorfluq münasibəti ekvivalentlik münasibəti olduğundan (bax, mühazirə 6, teorem 5), elementar xəttə yuxarıda verdiyimiz tərifi belə də ifadə etmək olar: *müəyyən ədədi aralığa homeomorf olan $\gamma_0 \in E_3$ fiquruna elementar xətt deyilir.*

Elementar xətlərə nümunələr göstərək.

Nümunə 1. Ucları A və B nöqtələri olan ω yarım çevrəsi parçaya homeomorf olduğundan, elementar xətt, daha dəqiq desək, qövsdür.

Nümunə 2. Düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində verilən $y = \sin x$ sinusoidinə $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ düzbucaqlı koordinat sistemində

$$x = t, \quad y = \sin t, \quad z = 0$$

tənlikləri ilə verilən fiqur kimi baxıla bilər, burada $t \in R$. Bu tən-liklər R çoxluğu ilə sinusoid arasında homeomorfizm yaradırlar. R çoxluğu Ox oxuna homeomorf olduğundan, sinusoid elemen-tar xətdir.

Yuxarıdakılardan aydın olur ki, əgər E_3 Evklid fəzasında düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemi verilmişdirsə, onda γ_0 ele-mentar xətti

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad (1)$$

tənliklər sistemi ilə təyin olunar, burada t müəyyən I aralığında dəyişir, (1) düsturlarının sağ tərəfləri isə I aralığında kəsilməz funksiyalardır və I aralığının γ_0 elementar xəttinə

$$t \mapsto \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

homeomorf inikasını həyata keçirirlər.

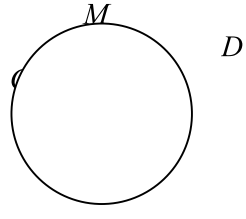
(1) tənlikləli verilmiş xəttin *parametrik tənlikləri* adlanır.

2. Elementar xətlərin sonlu, və ya hesabi çoxluğu ilə örtülə bilən fiqura *xətt* (və ya *əyri*) deyilir.

Bu tərifdən belə bir mühüm nəticə alınır: *əgər γ müəyyən xətdirsə və M onun üzərində nöqtədirsə, onda elə γ_0 elementar xətti vardır ki, $M \in \gamma_0 \subset \gamma$.*

Nümunələrə baxaq.

Nümunə 3. Çevrəni iki AMB və CND qövsləri ilə örtmək olar (şək.1). Ona görə də çevrə daxil etdiyimiz tərif mənasında xətdir.



B

A

N

Şəkil 1

Nümunə 4. $y = tgx$ funksiyasının qrafiki (tangensoid) elə elementar xətlərin hesabi çoxluğundan ibarətdir ki, onlardan hər biri x arqumenti $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ intervalında dəyişdikdə bu funksiyanın qrafikidir. Ona görə də tangensoid xətdir.

3. Tutaq ki, γ_0 elementar xətti (1) parametrik tənlikləri ilə verilmişdir, burada t müəyyən I aralığında dəyişir. Əgər $x(t), y(t), z(t)$ funksiyalarının müəyyən k natural ədədi üçün $k-$cı tərtibə qədər kəsilməz törəmələri vardırsa və hər bir $t \in I$ nöqtəsində

$$ranq\|x', y', z'\| = 1 \qquad (2)$$

hərti ödənilirsə, onda deyirlər ki, γ_0 C^k *sinifindən olan hamar xətdir* (ştrix onu göstərir ki, dəyişən t parametrinə görə diferensiallanır).

(2) şərtinin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, x', y', z' törəmə-ləri t parametrinin I aralığından olan heç bir qiymətində eyni zamanda sıfra bərabər olmurlar.

Hamar xəttə dair nümunəyə baxaq.

Nümunə 5. $x = t, y = \sin t, z = 0, t \in R$ tənlikləri Oxy müstəvisində sinusoidi təyin edirlər. Sinusoidin tənliklərinin sağ tərəflərinin $R-$də ixtiyari tərtibdən kəsilməz törəmələri vardır, belə ki, $x' = 1, y' = \cos t, z' = 0$, ona görə də (2) şərti ödənilir. Bu isə göstərir ki, sinusoid C^∞ sinifindən olan hamar xətdir.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, çevrə C^∞ sinifindən olan hamar xətdir. Doğrudan da, a radiuslu çevrənin düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində $x = a\cos t, y = a\sin t$ parametrik tənlikləri vardır. Bu çevrəyə $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemində

$$x = a\cos t, y = a\sin t, z = 0 \qquad (3)$$

tənlikləri ilə verilən fiqur kimi baxa bilərik. (3) tənliklərinin sağ tərəflərinin $R-$də ixtiyari tərtibdən kəsilməz törəmələri vardır,

belə ki, $x' = -a\sin t, y' = a\cos t, z' = 0.$ $x'^2 + y'^2 + z'^2 \neq 0$ oldu-ğundan, (2) şərti ödənilir. Deməli, çevrə C^∞ sinifindən olan hamar xətdir.

4. Tutaq ki, t parametri müəyyən I aralığında dəyiş-dikdə (1) tənlikləri γ_0 elementar xəttini təyin edirlər. Qeyd olunduğu kimi, bu tənliklər müəyyən $f: I \to \gamma_0$ homeomor-fizmini elə təyin edirlər ki, $f(I) = \gamma_0$ olsun. Əgər h homeomor-fizmi müəyyən $\tau = h(t)$,$t \in I$,$\tau \in I'$ qaydası üzrə I aralığını I' aralığına çevirirsə, onda $h^{-1}: I' \to I$ tərs inikası da homeo-morfizmdir, belə ki, $t = h^{-1}(\tau)$.

$t-$nin ifadəsini (1) tənliklərində yerinə yazsaq, alarıq:

$$x = f_1(\tau), y = f_2(\tau), z = f_3(\tau), \qquad (4)$$

burada $f_1(\tau) = x(h^{-1}(\tau)),$ $f_2(\tau) = y(h^{-1}(\tau)),$ $f_3(\tau) = z(h^{-1}(\tau)) - I'$ aralığında dəyişən τ arqumentinin mürəkkəb funksiyalarıdır. (4) qaydası üzrə təsir edən $I' \to E_3$ inikasını g ilə işarə edək. (1) və (4) düsturlarının müqayisəsi göstərir ki, $\tau = h(t)$ olduqda $f(t) = g(\tau)$. Buradan $f = g \circ h$ və $g = f \circ h^{-1}$ olması alınır. Beləliklə, $g-$homeomorfizmdir. Bu homeomorfizmdə I' aralığı γ_0 xəttinə çevrilir. Bu halda deyirlər ki, $\tau = h(t)$ funksiyası γ_0 xətti üzərində t parametrinin *əvəz olunmasını təyin edir.* Beləliklə, elementar xətt halında (1) tənliklərində parametrin əvəz olunması $h: I \to I'$ homeomlrfizmi vasitəsilə həyata keçirilir. Hamar əyri halında analoji məsələnin həlli daha mürəkkəbdir. Hər şeydən əvvəl, $\tau = h(t)$ funksiyası I aralığında diferensiallanan olmalıdır. Lakin bu şərt yetərli deyil. Mürəkkəb funksiyanın diferensial-lanması qaydasına görə,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}, \tag{5}$$

olduğundan, hamar xəttin ödəməli olduğu (2) şərti $\tau = h(t)$ funksiyasının üzərinə belə bir məhdudiyyət qoyur: $\frac{d\tau}{dt}$ törəməsi I aralığının heç bir nöqtəsində sıfra çevrilməməlidir. Bundan başqa, γ_0 xəttinin yeni parametrizasiyada da C^k sinifindən olması üçün $h(t)$ funksiyasının I aralığında $k-$cı tərtibə qədər kəsilməz törəmələrinin varlığını tələb etməliyik.

Beləliklə, *t parametrinin I aralığında dəyişməsi şərtilə (1) tənlikləri ilə verilmiş və C^k sinifindən olan hamar γ_0 xətti üçün parametrin mümkün əvəz olunması elə $h: I \to I'$ əvəz olunmasıdır ki, bu halda $h(t)$ funksiyasının I aralığında $k-$cı tərtibə qədər kəsilməz törəmələri vardır və birinci tərtib $\frac{dh}{dt}$ törəməsi aralığın bütün nöqtələrində sıfırdan fərqlidir.* Nümunəyə baxaq.

Nümunə 6. Oxy müstəvisində $y = x^2$ tənliyi ilə verilən para-bolası E_3 fəzasında $x = t, y = t^2, z = 0$ tənlikləri ilə verilə bilər, burada t $I = R$ aralığında dəyişir. Parabola C^∞ sininfindən olan hamar xətdir. Parametrin $\tau = t^3 + t$ əvəz olunmasına baxaq. $h(t) = t^3 + t$ funksiyasının ixtiyari tərtibdən törəmələrinin varlı-ğından və istənilən t üçün $\frac{dh}{dt} = 3t^2 + 1 \neq 0$ olmasından alınır ki, $\tau = t^3 + t$ mümkün əvəz olunmadır. Lakin parametrin $\tau = t^2$ düsturu ilə verilən əvəz olunması mümkün olmayandır. Bu onunla bağlıdır ki, $\tau = t^2$ əvəz olunması nəticəsində I aralığı ona homeomorf olmayan $I' = [0, \infty)$ aralığına çevrilir. Parametrin $\tau = t^3$ düsturu ilə verilən əvəz olunması da mümkün olmayandır. Doğrudan da, bu halda t^3 funksiyasının I aralığında istənilən tərtibdən kəsilməz törəmələrinin varlığına və bu əvəz olunmada I aralığının onun özünə homeomorf inikas etdirilməsinə baxmayaraq, $t = 0 \in I$ nöqtəsində $\frac{d\tau}{dt} = 0.$

Mühazirə 12

TOXUNAN DÜZ XƏTT. ƏYRİNİN TƏBİİ PARAMETRİZASİYASI

1. Əgər fəzada düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemi daxil edilmişdirsə, onda C^k sinifindən olan hamar γ xətti

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \tag{1}$$

parametrik tənlikləri ilə verilə bilər, burada (1) tənliklərinin sağ tərəflərinin müəyyən I aralığında $k-$cı tərtibə qədər kəsilməz tö-rəmələri vardır və bu aralıqda

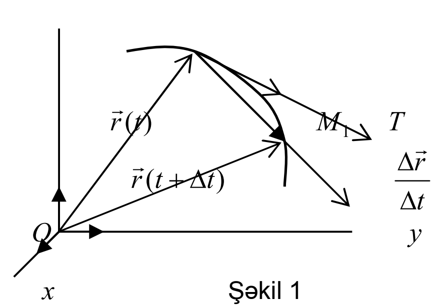
$$ranq\left\| \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\| = 1. \tag{2}$$

(1) tənliklərini uyğun olaraq, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlarına vurub, tərəf-tərəfə toplasaq, alarıq:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{3}$$

burada $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ və $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Göründüyü kimi, $\vec{r}(t) - I$ aralığında təyin olunmuş və koordinatları $x(t), y(t)$ və $z(t)$ funksiyaları vektor-funksiyadır. (1) tənlikləri (3) vektor tənliyinə ekvivalentdirlər. (3) tənliyi γ xəttinin *vektorial şəkildə parametrik tənliyi* adlanır. (2) şərti onu göstərir ki, istənilən $t \in I$ qiymətində $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq \vec{0}$.

Hamar γ xətti üzərində $\vec{r}(t)$ və $\vec{r}(t+\Delta t)$ radius vektorla-rı ilə təyin olunan M və M_1 nöqtələrini götürək. $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ vektoru MM_1 kəsəninin yönəldici vektorudur. Aşkardır ki, $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ vektoru da MM_1 kəsəninin yönəldici vektorudur (şək.1).



Şəkil 1

Δt sıfra yaxınlaşdıqda, M_1 nöqtəsi γ xətti üzərində yerini dəyişərək, M nöqtəsinə qeyri-məhdud yaxınlaşır və limit vəziyyə-tində onunla üst-üstə düşür. Bu zaman MM_1 kəsəni M nöqtəsi-nin ətrafında fırlanaraq, limit vəziyyətində γ xəttinə M nöqtəsin-də toxunan MT düz xətti ilə üst-üstə düşür (MT toxunanı kəsənin limit vəziyyəti kimi təyin olunur). MM_1 kəsəninin $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ yönəldici vektorunun $\Delta t \to 0$ şərti daxilində limiti MT toxunanının $\frac{d\vec{r}}{dt}$ yönəldici vektoru olur. Əgər γ xəttinin digər $\tau = h(t)$ parametri-zasiyasına baxsaq, alarıq:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}. \tag{4}$$

I aralığının bütün nöqtələrində $\frac{d\tau}{dt} \neq 0$ olduğundan, (4) ğərabərliyindən görünür ki, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ və $\frac{d\vec{r}}{d\tau}$ vektorları kollineardırlar, eləcə də I aralığının bütün nöqtələrində $\frac{d\vec{r}}{d\tau} \neq 0$. Bu o deməkdir ki, $\frac{d\vec{r}}{d\tau}$ vektoru da MT toxunanının yönəldici vektorudur. Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etdik:

Teorem. *(3) tənliyi ilə verilən hamar γ xəttinin hər bir M nöqtəsində M nöqtəsi və $\frac{d\vec{r}}{dt}$ yönəldici vektoru ilə təyin olunan toxu-nan düz xətt vardır.*

2. Tutaq ki, C^k sinifindən olan hamar γ xətti (1) tənlikləri ilə verilmişdir, burada t parametri müəyyən I aralığında dəyişir. $[\alpha, t] \subset I$ parçasını götürək. t parametri bu parçada dəyişdikdə, (1) tənlikləri ucları $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ və $B(x(t), y(t), z(t))$ nöqtə-lərində olan γ_1 hamar qövsünü təyin edirlər. Riyazi analiz kur-sundan məlum olduğu kimi, γ_1 qövsünün s uzunluğu

$$s = \int_\alpha^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \tag{5}$$

düsturu ilə, və ya vektorial şəkildə yazılan

$$s = \int_\alpha^t \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt \tag{6}$$

düsturu ilə hesablanır. Buradan aydın olur ki, s qövs uzunluğu t parametrinin funksiyasıdır: $s = s(t)$.

Yuxarı sərhəddi dəyişən olan müəyyən inteqralın məlum xassəsinə (5)-dən alarıq:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|. \qquad (7)$$

(7)-dən görünür ki, *hamar xəttin* $s(t)$ *qövs uzunluğu* t *parametrinin artan funksiyasıdır.*

$I_0=\{t\in I|t\geq\alpha\}$ aralığını götürək. Aşkardır ki, əgər t pa-rametri yalnız I_0 aralığında dəyişərsə, onda (1) tənlikləri ilə müəyyən $\gamma_1\subset\gamma$ hamar (C^k sinifindən) xətti təyin olunar. (5) düs-turu I_0 aralığının müəyyən $I_0^*\subset R$ aralığının üzərinə $s=s(t)$ ini-kasını təyin edir. $s=s(t)$ I_0 aralığında ciddi artan funksiyadır. Ona görə də bu funksiyanın $t=t(s)$ tərs funksiyası vardır və

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\frac{ds}{dt}}>0. \qquad (8)$$

(5) düsturundan müəyyən edirik ki, $s(t)$ funksiyasının I_0 aralığında $k-$cı tərtibə qədər kəsilməz törəmələri vardır. (8) bəra-bərliyi isə göstərir ki, $t(s)$ funksiyasının I_0^* aralığında $k-$cı tər-tibə qədər kəsilməz törəmələri vardır. Buradan aydın olur ki, $s(t)$ funksiyası elə $I_0\to I_0^*$ homeomorfizmini təyin edir ki, bu ho-meomorfizm γ_1 hamar xətti üzərində parametrin mümkün əvəz olunmasıdır.

Beləliklə, hamar xətt üzərində parametr olaraq, bu xəttin müəyyən nöqtəsindən hesablanan s qövs uzunluğunu götürmək olar. Bu parametrizasiya γ xəttinin *təbii parametrizasiyası* adla-nır.

3. Tutaq ki, hamar xətt üzərində təbii parametrizasiya se-çilmişdir. Onda (1) tənlikləri aşağıdakı kimi yazılar:

$$x=x(s), y=y(s), z=z(s),$$

burada $s-$xəttin müəyyən A nöqtəsindən hesablanan qövs uzun-uğudur. Bu halda (7) düsturundan $t=s$ əvəzləməsini aparmaqla, alarıq:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}=1, \text{ yəni } \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|=1.$$

Buradan görünür ki, $\frac{d\vec{r}}{ds}-$vahid vektordur. İsbat etdiyimiz yuxa-rıdakı teoremə görə, bu vektor uyğun M nöqtəsində əyriyə toxu-nan düz xəttin yönəldici vektorudur. $\frac{d\vec{r}}{ds}$ vektorunu M nöqtəsin-də *xəttə toxunan düz xəttin vahid vektoru* deyəcəyik və $\vec{\tau}$ ilə işarə edəcəyik:

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds}.$$

Mühazirə 13

XƏTTİN KANONİK REPERİ. FRENE DÜSTURLARI. ƏYRİLİK VƏ BURUQLUQ

1. C^k sinifindən olan (burada $k\geq 3$) və

$$\vec{r}=\vec{r}(s) \qquad (1)$$

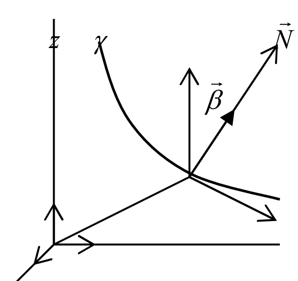
təbii parametizasiyası ilə verilən hamar γ xəttinə baxaq.

Əgər fəzada düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemi seçilmiş-dirsə, onda (1) tənliyi

$$x=x(s), y=y(s), z=z(s) \qquad (2)$$

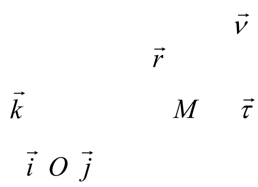
tənliklərinə ekvivalentdir.

$\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds}$ vektoru γ xəttinə M nöqtəsində toxunan düz xəttin



vahid vektorudur, burada $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (bax, şək.1).

$\vec{N} = \dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$ vektoru γ xəttinin M nöqtəsində *əyrilik vektoru* adlanır. $|\vec{N}| = k$ ədədinə γ xəttinin M nöqtəsində *əyriliyi* deyilir. γ xətti boyunca k əyriliyi s təbii parametrinin funksiyasıdır.



Şəkil 1

Əgər verilmiş M nöqtəsində $k \neq 0$ olarsa, onda $\rho = \dfrac{1}{k}$ ədədinə xəttin M nöqtəsində *əyrilik radiusu* deyilir. Beləliklə, əgər xətt (1) təbii parametrizasiyası ilə verilərsə, onda onun əyriliyi

$$k = \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \tag{3}$$

düsturu ilə hesablanar.

γ xətti (2) tənlikləri ilə verildiyi halda (3) düsturu

$$k = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \tag{4}$$

şəklində yazılır.

Teorem 1. *γ xəttinin sadə xətt olması üçün zəruri və kafi şərt onun hər bir nöqtəsində əyriliyinin sıfra bərabər olmasıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, γ sadə xətdir (yəni ya düz xətdir, ya parçadır, ya da şüadır). Onda bu xətt

$$\vec{r} = \vec{p}s + \vec{r}_0$$

təbii parametrizasiyası ilə təyin olunar, burada s müəyyən I aralığına daxildir, $\vec{p}$ və $\vec{r}_0$ isə sabit vektorlardır. Buradan aydın olur ki, $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \vec{p}$, $\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \vec{0}$. (3) düsturuna əsasən, istənilən $s \in I$ üçün $k = 0$.

Tərsinə: tutaq ki, (1) xəttinin bütün nöqtələri üçün əyrilik sıfra bərabərdir. (4) bərabərliyindən istifadə etməklə alırıq:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0,\ \frac{d^2y}{ds^2} = 0,\ \frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Bu münasibətlərdən alınır ki,

$$\frac{dx}{ds} = p_1,\ \frac{dy}{ds} = p_2,\ \frac{dz}{ds} = p_3, \tag{5}$$

burada p_1, p_2, p_3 – sabit ədədlərdir.

(5) bərabərliklərini inteqrallasaq, alarıq:

$$x = p_1 s + x_0, \quad y = p_2 s + y_0, \quad z = p_3 s + z_0, \tag{6}$$

burada $s \in I$. γ xəttinin (6) parametrik tənliklərindən məlum olur ki, bu xətt $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsindən keçən və yönəldici vektoru $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ vektoru olan düz xətt üzərində yerləşir. Bu isə o deməkdir ki, γ – sadə xətdir.

2. Fərz edək ki, γ xəttini[redacted]bütün nöqtələrində əyriliyi sıfırdan fərqlidir. Bu şərt daxilində γ xəttinin hər bir M nöqtə-sindən $(M, \vec{N})$ düz xətti keçir. Bu düz xəttə γ xəttinin M nöqtəsində *baş normalı* deyilir. X mühazirədə verilən teorem 2-yə görə $\vec{N} \perp \vec{\tau}$. Beləliklə, $(M, \vec{N})$ *baş normalı* $(M, \vec{\tau})$ *toxunanına perpendikulyardır.*

$\dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \vec{v}$ vektoru *baş normalın vahid vektoru* adlanır. $|\vec{N}| = k$ olduğundan, $\vec{N} = k\vec{v}$, yəni

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}. \qquad (7)$$

$\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$ vektorunu təyin edək. $(M, \vec{\beta})$ düz xətti γ xətti-nin M nöqtəsində *binormalı,* $\vec{\beta}$ vektoru isə *binormalın vahid vektoru* adlanır.

M nöqtəsinin və $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ vektorlarının əmələ gətirdiyi R_M reperi γ xəttinin M nöqtəsində *kanonik reperi* adlanır (bax. şək.1). Buradan aydın olur ki, hamar xəttin əyriliyinin sıfırdan fərqli olduğu hər bir nöqtəsində kanonik reper qurula bilər.

R_M reperinin koordinat müstəviləri aşağıdakı kimi adlan-dırılırlar:

$(M, \vec{\tau}, \vec{\nu})$ – *çoxtoxunan müstəvi* ;

$(M, \vec{\nu}, \vec{\beta})$ – *normal müstəvi* ;

$(M, \vec{\tau}, \vec{\beta})$ – *düzləndirici müstəvi* .

M nöqtəsinin γ xətti boyunca yerdəyişməsi zamanı R_M reperi də yerini dəyişir. Ona görə də R_M reperinə adətən γ xətti-nin *hərəkətli reperi* deyilir.

3. $\vec{\nu}$ vahid vektor olduğundan, $\frac{d\vec{\nu}}{ds} \perp \vec{\nu}$, ona görə də $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$ vektoru düzləndirici müstəviyə paraleldir. Buradan məlum oldur ki, bu vektoru $\vec{\tau}$ və $\vec{\beta}$ vektorları üzrə ayırmaq olar:

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = \alpha\vec{\tau} + \chi\,\vec{\beta}. \qquad (8)$$

$\vec{\tau} \cdot \vec{\nu} = 0$ eyniliyini s parametrinə görə diferensiallayaq:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}\vec{\nu} + \vec{\tau}\,\frac{d\vec{\nu}}{ds} = 0.$$

Əgər bu bərabərlikdə $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ və $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$ vektorlarını (7) və (8) düs-turları üzrə əvəz etsək, $\alpha = -k$ münasibətini alarıq. Nəticədə (8) düsturu belə yazılır:

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + \chi\,\vec{\beta}. \qquad (9)$$

$\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$ eyniliyini s parametrinə görə diferensiallayaq:

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \left[\frac{d\vec{\tau}}{ds}, \vec{\nu}\right] + \left[\vec{\tau}, \frac{d\vec{\nu}}{ds}\right].$$

Əgər bu bərabərlikdə $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ və $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$ vektorlarını onların (7) və (9) bəra-bərliklərindən olan ifadələri ilə əvəz etsək, yaza bilərik:

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\chi\vec{\nu} \quad . \qquad (10)$$

χ ədədi γ xəttinin M nöqtəsində *buruqluğu* adlanır. γ xətti boyunca χ dəyişəni s təbii parametrinin funksiyası olur. (10) düsturundan görünür ki, $|\chi| = \left|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right|$. Digər tərəfdən, $\chi > 0$ olması üçün zəruri və kafi şərt $\vec{\nu}$ və $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ vektorlarının əks istiqa-mətlərə və $\chi < 0$ olması üçün zəruri və kafi şərt $\vec{\nu}$ və $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ vek-torlarının eyni istiqamətə malik olmasıdır. Xəttin buruqluğunun modulunu və işarəsini belə xarakterizə etmək olar.

Beləliklə, *Frene düsturları* adlandırılan aşağıdakı bəra-bərliklər doğrudur:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu},$$

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + \chi\,\vec{\beta},$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\chi\,\vec{\nu}.$$

Qeyd edək ki, hamar xətlər nəzəriyyəsi Frene düstur-larının tətbiqinə əsaslanır.

γ xətti (1) təbii parametrizasiyası ilə verildiyi halda buruqluğun hesablanması düsturunu çıxaraq. Frene düstur-larından birincisini belə yazmaq olar: $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = k\vec{\nu}$. Bu münasibəti diferensiallayıb, Frene düsturlarından ikincisini nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = -k^2\vec{\tau} + \frac{dk}{ds}\vec{\nu} + k\chi\,\vec{\beta}.$$

Beləliklə, $\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \vec{\tau}(k\vec{\nu})(-k^2\vec{\tau} + \frac{dk}{ds}\vec{\nu} + k\chi\,\vec{\beta}) = k^2$. Buradan axtarılan düstur alınır:

$$\chi = \frac{1}{k^2}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right). \qquad (11$$

Mühazirə 14

MÜSTƏVİ ƏYRİLƏRİ. BİRPARAMETRLİ MÜSTƏVİ ƏYRİLƏRİ AİLƏSİ

1. Oxy müstəvisində

$$x = x(t), y = y(t) \qquad (1)$$

parametrik tənlikləri ilə verilən hamar γ əyrisinə baxaq. $\vec{r}'(t) = (x'(t), y(t)) \neq 0$ olduğuna görə, riyazi analiz kursundan məlum olan tərs funksiyaya dair teoremə əsasən, (1) tənliklərindən t parametrini yox etməklə

$$F(x, y) = 0 \qquad (2)$$

tənliyini alırıq. (2) tənliyinə müstəvi əyrisinin *qeyri-aşkar tənliyi* deyilir. Qeyd edək ki, (2) şəklində olan hər bir tənlik müstəvi əyrisi təyin etmir. (2) tənliyinin müəyyən M_0 nöqtəsinin ətrafında əyri təyin etməsi üçün

$$\left.\overrightarrow{gradF}\right|_{M_0(x_0,y_0)} = \left.\{F'_x, F'_y\}\right|_{M_0(x_0,y_0)} = \left.\left\{\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right\}\right|_{M_0(x_0,y_0)} \neq 0 \qquad (3)$$

şərti ödənilməlidir. Doğrudan da, (3) şərtindən F'_x və F'_y xüsusi törəmələrindən heç olmazsa birinin sıfırdan fərqli olması görünür. $\left.F'_y\right|_{M_0(x_0,y_0)} \neq 0$ olduğunu fərz edək. Bu halda riyazi analiz kursundan məlum olan qeyri-aşkar funksiyaya dair teoremə əsa-sən M_0 nöqtəsinin yaxın ətrafında diferensiallanan

$$y = f(x) \qquad (4)$$

funksiyasını təyin edirik. (4) bərabərliyi müstəvi əyrisinin *aşkar şəkildə tənliyi* adlanır. Müstəvi əyrisinin (4) tənliyini parametrik olaraq

$$x = x(t), y = f(t)$$

şəklində yaza bilərik. Beləliklə, müstəvi əyrisi lokal olaraq bir-birinə ekvivalent olan

1. $\vec{r} = \vec{r}(t), \quad \left.\vec{r}'\right|_{M_0} \neq 0;$
2. $x = x(t), y = y(t), \quad \left.\{x', y'\}\right|_{M_0} \neq 0;$
3. $F(x, y) = 0, \quad \left.\{F'_x, F'_y\}\right|_{M_0} \neq 0;$
4. $y = f(x)$

tənliklərindən hər hansı biri ilə verilə bilər.

2. Tutaq ki, (2) qeyri-aşkar tənliyi ilə müstəvi əyrisi ve-rilmişdir. (2) tənliyi lokal olaraq (1) tənliklərinə ekvivalent olduğundan, $F(x, y) = 0$ tənliyindən t dəyişəninə nəzərən

$$F(x(t), y(t)) = 0$$

eyniliyini alarıq. Bu bərabərliyin hər iki tərəfindən t dəyişəninə görə diferensiallayaq:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}=0. \qquad (5)$$

$\overrightarrow{gradF}=\{F'_x, F'_y\}=\left\{\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right\}\neq 0$ şərtinin ödənildiyi məlumdur. Bu şərt daxilində (5) bərabərliyindən $\frac{dy}{dx}$ nisbətini

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}, \quad (F'_y\neq 0) \qquad (6)$$

şəklində təyin edə bilərik. (6) münasibətini toxunan düz xəttin

$$\frac{x-x_0}{x'}=\frac{y-y_0}{y'}$$

kanonik tənliyində nəzərə alsaq, bu düz xəttin

$$F'_x(x-x_0)+F'_y(y-y_0)=0$$

şəklində olan tənliyini alarıq.

(2) qeyri-aşkar tənliyi ilə verilmiş müstəvi xəttinin

$$F'_x\big|_{M_0(x_0,y_0)}=F'_y\big|_{M_0(x_0,y_0)}=0$$

münasibətini ödəyən nöqtələrinə onun *məxsusi nöqtələri* deyilir.

3. Əgər $\gamma-$müstəvi xəttidirsə (və onun hər bir nöqtəsində əyriliyi sıfırdan fərqlidirsə- $k\neq 0$), onda $\vec{\tau}$ və $\vec{\nu}$ vektorları xətti gz üzərində saxlayan müstəviyə paraleldirlər. Bu isə $\vec{\beta}$ vektoru-nun sabit vektor olması deməkdir. Beləliklə,

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds}=0\Rightarrow \chi=0.$$

Tərsinə, tutaq ki, γ xəttinin hər bir nöqtəsində buruqluq sıfra bərabərdir: $\chi=0$. Frene düsturlarının üçüncüsündən müəy-yən edirik ki,

$$\vec{\beta}=\vec{b},$$

burada $\vec{b}$ vahid vektoru s təbii parametrindən asılı deyil. $\vec{b}\cdot\vec{\tau}=0$ eyniliyindən alınır:

$$\frac{d(\vec{b}\cdot\vec{r})}{ds}=0,$$

ona görə də

$$\vec{b}\cdot\vec{r}=c=const. \qquad (7)$$

Ortonormallaşmış $R=\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ reperində

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}, \quad \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$$

olduğunu qəbul etsək, (7) bərabərliyini

$$b_1x+b_2y+b_3z-c=0 \qquad (8)$$

şəklində yaza bilərik. Göründüyü kimi, hər bir $M\in\gamma$ nöqtəsi R reperində (8) tənliyi ilə verilən müstəvi üzərində yerləşir. Bu isə o deməkdir ki, $\gamma-$müstəvi xəttidir.

Qeyd 1. Müstəvi xətti üçün $\chi=0$ olduğundan, Frene düsturları aşağıdakı kimi yazılırlar:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=k\vec{\nu}, \quad \frac{d\vec{\nu}}{ds}=-k\vec{\tau}\ .$$

Qeyd 2. Məlumdur ki, $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ paramet-rik tənlikləri ilə verilən γ xəttinin əyriliyi

$$k=\frac{\sqrt{(y'z''-y''z')^2+(z'x''-z''x')^2+(x'y''-x''y')^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

düsturu ilə hesablanır (bax, XIII mühazirə, bənd 4). Bu düstur-dan görünür ki, əgər γ Oxy müstəvisində yerləşən müstəvi xətti-dirsə, onda

$$k=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\ . \tag{9}$$

Müstəvi əyrisi $y=f(x)$ tənliyi ilə verildiyi halda isə onun əyriliyi

$$k=\frac{|f''|}{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{10}$$

düsturu ilə hesablanır.

3. Tutaq ki,

$$F(x,y,C)=0 \tag{11}$$

tənliyi ilə müstəvi xətləri ailəsi verilmişdir, burada $F-$ arqumentlərinin kəsilməz diferensiallanan funksiyasıdır, $C-$ parametrdir. $x=x(t), y=y(t)$ parametrik tənlikləri ilə verilən γ müstəvi xəttinə baxaq.

3. Hər bir nöqtəsində əyriliyi sıfırdan fərqli olan və $\vec{r}=\vec{r}(s)$ tənliyi ilə verilən hamar γ müstəvi xəttinə baxaq. γ müstəvi xəttinin $M\in\gamma$ nöqtəsi üçün $(M,\vec{v})$ düz xətti bu xəttin M nöqtəsində *normalı* adlanır.

Mühazirə 15

SƏTH VƏ ONUN VERİLMƏ ÜSULLARI. HAMAR SƏTHLƏR

1. Əvvəlcə səthlərin öyrənilməsi üçün zəruri olan iki skal-yar arqumentin vektor funksiyası anlayışını daxil edək.

Tutaq ki, $V-R$ həqiqi ədədlər meydanı üzərində üçölçülü Evklid vektor fəzasıdır. *İkiölçülü G aralığı* dedikdə, aşağıdakı çoxluqlarından hər hansı birini başa düşürük: $R^2=R\times R$ fəzası, $v\geq 0$ şərtini ödəyən bütün $(u,v)\in R^2$ nöqtələrindən təşkil olun-muş R_+^2 qapalı ədədi yarımfəzası və ya $0\leq u\leq a, 0\leq v\leq a, a>0$ şərtlərini ödəyən bütün $(u,v)\in R^2$ nöqtələrindən təşkil olunmuş ədədi kvadrat. Əgər hər bir $(u,v)\in G$ nöqtəsinə müəyyən $\vec{r}(u,v)\in V$ vektorunu qarşı qoyan qayda verilmişdirsə, onda deyirlər ki, ikiölçülü G aralığında *u və v skalyar aqumentlərinin $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyası* təyin olunmuşdur. Aşkardır ki, $|\vec{r}(u,v)|$ eyni arqumentlərin ədədi funksiyasıdır.

$|\vec{r}(u,v)|$ ədədi funksiyası $(u_0,v_0)\in G$ nöqtəsinin yaxın ətrafında sonsuz kiçik olduqda, yəni $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)}|\vec{r}(u,v)|=0$ şərti ödənildikdə, $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyası (u_0,v_0) nöqtəsinin yaxın ətrafında *sonsuz kiçik vektor-funksiya* adlanır.

Sabit $\vec{a}\in V$ vektoru üçün $\vec{r}(u,v)-\vec{a}$ (u_0,v_0) nöqtəsinin yaxın ətrafında sonsuz kiçik olduqda deyirlər ki, $\vec{a}$ vektoru $(u,v)\to(u_0,v_0)$ olduqda $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyasının *limitidir.* Bu halda belə yazırlar: $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)}\vec{r}(u,v)=\vec{a}$.

$\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)}\vec{r}(u,v)=\vec{r}(u_0,v_0)$ şərti ödənildikdə $\vec{r}(u,v)$ vektor - funksiyasına $(u_0,v_0)\in G$ nöqtəsində *kəsilməz* vektor- funksiya deyilir. G aralığının hər bir nöqtəsində kəsilməz olan $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyasına *bu aralıqda kəsilməz olan* vektor-funksiya deyilir.

G aralığında verilmiş $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyasına baxaq. V vektor fəzasının ortonormallaşmış hər hansı $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ bazisini götürək və hər bir $(u,v)\in G$ nöqtəsində $\vec{r}(u,v)$ vektorunu bu bazisin vektorları üzrə ayıraq:

$$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}\ . \tag{1}$$

(1) bərabərliyinin sağ tərəfindəki $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ funksiyaları u,v arqumentlərinin G aralığında təyin olunmuş funksiyalardır. Bu funksiyalara $\vec{r}(u,v)$ *vektor-funksiyasının* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *bazisində koordinatları* deyilir.

Tutaq ki, $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \vec{r}(u,v) = \vec{a}$ və $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. Onda $(u,v) \to (u_0,v_0)$ şərti daxilində aşağıdakılar doğrudur:

$$\lim x(u,v) = a_1, \ \lim y(u,v) = a_2, \ \lim z(u,v) = a_3 .$$

Əgər $v = v_0 = const$ qəbul etsək, onda u arqumentinin $(u,v_0) \in G$ şərtini ödəyən müxtəlif qiymətləri üçün $\vec{r}(u,v)$ bir skalyar arqumentin $\vec{r}(u,v_0)$ vektor-funksiyası olar. Əgər $\vec{r}(u,v_0)$ vektor-funksiyasının u dəyişəninə nəzərən $\dfrac{d\vec{r}(u,v_0)}{du}$ törəməsi vardırsa, onda bu törəməyə $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyasının u dəyişəninə nəzərən *xüsusi törəməsi* (*birinci tərtib*) deyilir və $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, yaxud $\vec{r}_u$ kimi işarə olunur. Analoji olaraq, $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{r}_v$ xüsusi törə-məsi təyin təyin olunur.

(1) ayrılışından alınır ki, $\vec{r}(u,v_0)$ vektor-funksiyasının koordinatları $x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0)$ funksiyalarıdır, ona görə də mühazirə 10-da verilən teorem 1-ə əsasən $(u,v) \in G$ nöqtəsində $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ xüsusi törəmələrinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt bun öq-tədə uyğun olaraq,

$$x_u = \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, y_u = \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}, z_u = \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}$$

və

$$x_v = \frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, y_v = \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}, z_v = \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}$$

törəmələrinin varlığıdır. Qeyd olunan teoremdən həm də alınır ki,

$$\vec{r}_u = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k} \text{ və } \vec{r}_v = x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k}. \tag{2}$$

(1) ayrılışının sağ tərəfindəki $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ funk-siyaları $(u,v) \in G$ nöqtəsində diferensiallanan olduqları halda

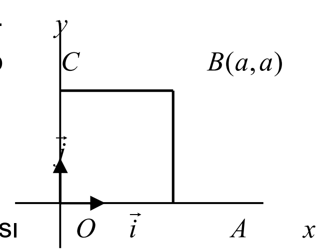
$$d\vec{r} = dx(u,v)\vec{i} + dy(u,v)\vec{j} + dz(u,v)\vec{k} \tag{3}$$

vektoruna $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyasının (u,v) nöqtəsində *dife-rensialı* deyilir. (2) düsturlarının köməyi ilə müəyyən etmək olur ki,

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv . \tag{4}$$

$x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ funksiyaları (u,v) nöqtəsində diferensialla-nan olduqda deyirlər ki, $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyası (u,v) *nöqtə-sində diferensiallanandır.* G aralığının hər bir nöqtəsində difrensi-allanan olan $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyasına G *aralığında diferen-siallanan* vektor-funksiya deyilir.

2. E_2 Evklid müstəvisi üzərində düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemini da-xil edək (şək.1). Aşağıdakı qayda ilə $E_2 \to R^2$ biyektiv inikasını təyin edək: $M(x,y) \in E_2$ nöqtəsinə $(x,y) \in R^2$ nöq-təsini qarşı qoyuruq. Bu homeomorfiz-mə əsasən R^2 ədədi fəzasını E_2 fəzası ilə, R_+^2 ədədi yarımfəzasını Oxy müs-təvisinin $y \geq 0$ şərti ilə təyin olunan qa-palı yarımmüstəvisi ilə, ədədi kvadratı isə $OABC$ kvadratı ilə eyniləşdirək, burada B nöqtəsinin $B(a,a)$ koordinatları vardır (şək.1).



Şəkil 1

Aşağıdakı fiqurlardan hər hansı birinə üçölçülü E_3 Evklid fəzasında *sadə səth* deyilir: müstəvi, qapalı yarımmüstəvi, kvadrat.

Sadə səthlərdən istənilən birinə homeomorf olan fiqur *elementar səth* adlanır. Məsələn, elliptik və hiperbolik paraboloidlər, parabolik silindr müstəviyə homeomorf olduqları üçün elementar səthlərdir. Sərhəddi ilə bərabər götürülən yarımsfera da elementar səthdir (dairəyə homeomorf olduğu üçün).

Yuxarıdakılara əsasən belə bir nəticəyə gəlmək olar: $F \subset E_3$ *fiquru müəyyən ikiölçülü $G \subset R^2$ aralığına homeomorf ol-duqda elementar səth adlanır.*

E_3 Evklid fəzasında elementar səthlərin sonlu və ya hesabi çoxluğu ilə örtülə bilən fiqura *səth* deyilir. Tərifdən alınır ki, F səthinin M nöqtəsi üçün elə F_0 elementar səthi vardır ki, $M \in F_0 \subset F$.

Hər bir elementar səthin özü səthdir. Lakin elementar səth olmayan səthlər də vadır. Belə səthlərə aşağıdakıları nümunə olaraq göstərə bilərik:

1) sfera (onu iki yarımsfera ilə örtmək mümkündür);
2) ellipsoid (bu səth sferaya homeomorfdur);
3) elliptik silindr (onu hər biri müstəviyə homeomorf olan sonlu sayda «silindrik zolaq»larla örtmək olar);
4) biroyuqlu hiperboloid (bu səth elliptik silindrə homeomorfdur).

3. E_3 Evklid fəzasında düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat siste-mini daxil edək və ikiölçülü G aralığını F_0 elementar səthinə çevirən $f: G \to F_0$ homeomorfizminə baxaq. Əgər $(u,v) \in G$ nöqtəsi $M(x,y,z) \in F_0$ nöqtəsinə çevrilirsə, onda aşkardır ki, x,y,z koordinatları u,v dəyişənlərinin, G aralığında təyin olunan funksiyalarıdır:

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v). \tag{5}$$

(5) tənliklərinə F_0 elementar səthinin *parametrik tənlikləri* deyilir. Bu tənliklər

$$\vec{r} = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \tag{6}$$

vektor tənliyinə ekvivalentdirlər, burada $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \overrightarrow{OM}$ - M nöqtəsinin radius-vektorudur. (6) tənliyinin sağ tərəfini $\vec{r}(u,v)$ ilə işarə etməklə, bu tənliyi

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \tag{7}$$

şəklində yazmaq olar, burada $\vec{r}(u,v) - u,v$ skalyar arqument-lərinin G aralığında təyin olunan vektor- funksiyasıdır.

4. Tutaq ki, $F_0 -$(5) parametrik tənlikləri ilə verilən elementar səthdir, belə ki, $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ G ikiölçülü ara-lığında təyin olunmuş funksiyalardır. Əgər (5) tənliklərinin sağ tərəfləri G aralığında $k-$cı ($k-$natural ədəddir) tərtibə qədər kəsilməz xüsusi törəmələri olan funksiyalardırsa və hər bir $(u,v) \in G$ nöqtəsində

$$rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2 \tag{8}$$

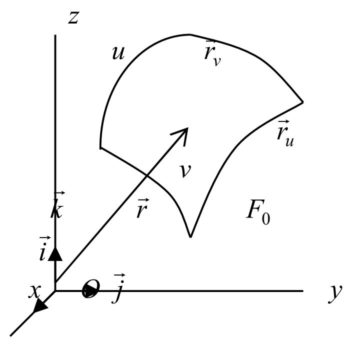
olarsa, onda F_0 səthinə C^k *sinifindən olan hamar* elementar səth deyilir.

Qeyd etdiyimiz kimi, (5) parametrik tənlikləri (7) vektor tənliyinə ekvivalentdirlər. Digər tərəfdən, $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiya-sının $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ xüsusi törəmələri üçün (2) bərabərlikləri doğrudur. Ona görə də (8) şərtinin həndəsi mənası ondan ibarətdir ki, $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ vektorları G ikiölçülü aralığında xətti asılı deyil, yəni istənilən $(u,v) \in G$ nöqtəsində $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ vektoru sıfır vektordan fərqlidir.

Əgər (5) tənliklərində $v = v_0 = const$ qəbul edərək, $(u,v_0) \in G$ şərti daxilində yalnız u arqumentini dəyişsək, bir skalyar u arqumentinin $\vec{r} = \vec{r}(u,v_0)$ vektor-funksiyasını alarıq və ona görə də $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ bərabərliyini ödəyən bütün M nöqtələri çoxluğu F_0 elementar səthi üzərində yerləşən müəyyən hamar xətt təyin edər. Bu xətti u *xətti* adlandırırıq. $\vec{r}_u$ vektoru (u,v_0) nöqtəsində u xəttinə toxunan vektordur. Analoji olaraq, hər bir $M \in F_0$ nöqtəsindən hamar $u = const$ və ya v *xətti* keçir. Əgər $(u,v) \in G$ nöqtəsi məlumdursa, onda (5) düsturlarına görə $M(x,y,z) \in F_0$ nöqtəsini təyin etmək olur. Deməli, u və v para-metrləri səth üzərindəki nöqtələri birqiymətli təyin edirlər. Məhz bu səbəbdən u və v parametrlərinə F_0 səthi üzərindəki M nöqtə-sinin *əyrixətli koordinatları* deyilir.

Beləliklə, (5) tənlikləri (yəni $f:G \to F_0$ homeomorfizmi) ilə F_0 səthinin parametrizasiyası bu səth üzərində məyyən əyri-xətli u,v koordinat sisteminə gətirir.

Bundan başqa, u xətləri ailəsi və v xətləri ailəsi F_0 səthini elə örtürlər ki, hər bir $M \in F_0$ nöqtəsindən müxtəlif istiqamətlərdə yalnız bir u xətti və yalnız bir v xətti keçir (bu xətlərə M nöqtəsində toxunan $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ vektor-ları kollinear deyil). Bu halda deyir-lər ki, u və v xətləri səth üzərində koordinat şəbəkəsi əmələ gətirirlər. (şək. 2).



Şəkil 2

Hamar xəttə dair nümunəyə baxaq. Tutaq ki, düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemində

$$x = u\cos v, y = u\sin v, z = bv \qquad (9)$$

parametrik tənlikləri ilə səth verilmişdir, burada $b > 0, (u,v) \in R^2$. Bu səth üçün

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & o \\ -u\sin v & u\cos v & b \end{pmatrix}$$

olduğundan, hər bir $(u,v) \in R^2$ nöqtəsində (8) şərti ödənilir. Baxı-lan səth C^∞ sinifindən olan hamar səthdir ($x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ funksiyalarının u,v arqumentlərinə nəzərən istənilən tərtibdən kəsilməz xüsusi törəmələri vardır). Bu səthə *düz helikoid* deyilir.

Mühazirə 16

SƏTHƏ TOXUNAN MÜSTƏVİ VƏ NORMAL

1. Tutaq ki, $G \subset R^2$ ikiölçülü aralığında

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \qquad (1)$$

vektor tənliyi ilə C^k sinifindən olan hamar F səthi təyin olunmuşdur.

$$u = u(t), v = v(t) \qquad (2)$$

qəbul edək, burada t müəyyən $I \subset R$ aralığında elə dəyişir ki, ixtiyari $t \in I$ üçün $(u(t), v(t)) \in G.$

Biz I aralığında $u(t)$ və $v(t)$ funksiyalarının $k-$cı tərtibə qədər kəsilməz törəmələrinin varlığını və bu aralıqdan olan bütün nöqtələrdə $\frac{du}{dt}$ və $\frac{dv}{dt}$ törəmələrinin eyni vaxtda sıfıra bərabər olmadığını tələb edirik.

u və v dəyişənlərinin (2) ifadələrini (1) tənliyində yerinə yazsaq, alarıq:

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))\,. \qquad (3)$$

(3) tənliyinin sağ tərəfi bir skalyar t arqumentinin müəyyən vektor-funksiyasıdır. Bu funksiyanı $\vec{r}^*(t)$ ilə işarə edək və (3) tənliyini belə yazaq:

$$\vec{r} = \vec{r}^*(t). \qquad (4)$$

(4) tənliyi F səthi üzərində yerləşən və C^k sinifindən olan xətt təyin edir.

Tərsinə: F səthi üzərində yerləşən və C^k sinifindən olan istənilən hamar xətt (2) tənlikləri ilə təyin oluna bilər. Burada $u(t)$ və $v(t)$ $(u(t), v(t)) \in G$ şərtini ödəyən müəyyən I aralığında verilmiş funksiyalardır, $k-$cı tərtibə qədər kəsilməz törəmələrə malikdirlər və $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ törəmələri $I-$dən olan heç bir nöqtədə eyni vaxtda sıfra bərabər olmurlar.

(2) tənliklərinə F səthi üzərində yerləşən xəttin *daxili tənlikləri* deyilir.

2. Bilirik ki, C^k sinifindən olan və (1) tənliyi ilə verilən hamar F səthinin hər bir M_0 nöqtəsində $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ xətti asılı olmayan vektorlardır. M_0 nöqtəsindən $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ vektorlarına paralel keçən müstəvini $(M_0, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ ilə işarə edək.

Teorem 1. *Tutaq ki,* $M_0(u_0, v_0)$ – *(1) tənliyi ilə verilən və* C^k *sinifindən olan* F *səthi üzərində nöqtədir. Onda* F *səthi üzərin-də yerləşən və* M_0 *nöqtəsindən keçən bütün hamar xətlərə bu nöqtədə toxunan düz xətlər çoxluğu* $(M_0, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ *müstəvisinin* M_0 *mərkəzli düz xətlər dəstəsini əmələ gətirir.*

İsbatı. F səthi üzərində yerləşən və M_0 nöqtəsindən keçən ixtiyari hamar γ xəttinə baxaq və fərz edək ki, bu xətt (2) daxili tənlikləri ilə təyin olunmuşdur. M_0 nöqtəsinin parametrini t_0 ilə işarə edək:

$$u_0 = u(t_0), v_0 = v(t_0) .$$

γ xəttinə M_0 nöqtəsində toxunan vektoru tapaq. (3) tən-liyindən alırıq: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}$, burada $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ xüsusi törəmələri (u_0, v_0) nöqtəsində, $\frac{du}{dt}$ və $\frac{dv}{dt}$ törəmələri isə t_0 nöqtəsində hesab-lanmışdır. Buradan alınır ki, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ vektoru $(M_0, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ müstəvisinə para-leldir, ona görə də γ xəttinə M_0 nöqtəsində toxunan düz xətt bu müstəvi üzərində yerləşir.

Tərsinə: tutaq ki, $(M_0, \vec{a})$ – $(M_0, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ müstəvisinin M_0 nöqtəsindən keçən ixtiyari düz xəttidir. Onda aşkardır ki, $\vec{a} = \alpha\vec{r}_u + \beta\vec{r}_v$, burada α və β eyni vaxtda sıfıra bərabər olmayan ədədlərdir. F səthi üzərində yerləşən və $u = u_0 + \alpha t, v = v_0 + \beta t$ tənlikləri ilə verilən γ_1 xəttinə baxaq, burada t müəyyən aralıqda elə dəyişir ki, $(u, v) \in G$. $\vec{r} = \vec{r}(u_0 + \alpha t, v_0 + \beta t)$ tənliyi ilə γ_1 xətti fəzada təyin olunur. γ_1 xəttinə M_0 nöqtəsində toxunan vektoru tapaq:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt} .$$

$\frac{du}{dt} = \alpha, \frac{dv}{dt} = \beta$ olduğundan, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}$. Deməli, γ_1 xəttinə M_0 nöq-təsində toxunan düz xətt $(M_0, \vec{a})$ düz xətti ilə üst-üstə düşür. ■

F səthi üzərində yerləşən və M_0 nöqtəsindən keçən bütün hamar xətlərə toxunan düz xətlərin yerləşdikləri müstəviyə F səthinə M_0 nöqtəsində *toxunan müstəvi* deyilir. İsbat etdiyimiz teorem 1-ə görə bu müstəvi M_0 nöqtəsi və kollinear olmayan $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ vektorları ilə təyin olunur.

$M_0 \in F$ nöqtəsindən toxunan müstəviyə perpendikulyar keçən düz xətt F hamar səthinə M_0 nöqtəsində normal düz xətti adlanır. $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ vektoru kollinear olmayan və F səthinə M_0 nöqtəsində toxunan müstəviyə paralel olan $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ vektorlarına perpen-dikulyardır. Bu o deməkdir ki, $\vec{N}$ vektoru toxunan müstəvinin özünə də perpendikulyardır. Deməli, $(M_0, \vec{N})$ *düz xətti* F *səthinə* M_0 *nöqtəsində normal düz xətdir.*

3. Tutaq ki, F səthinə toxunan müstəviyə perpendikulyar olan $\vec{N}$ vektorunun düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemində (N_1, N_2, N_3) koordinatları vardır. Onda bu səthə $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində toxunan müstəvi

$$(x - x_0)N_1 + (y - y_0)N_2 + (z - z_0)N_3 = 0 \qquad (5)$$

tənliyi ilə təyin olunar.

Səthə M_0 nöqtəsində normal düz xətt isə aşağıdakı kanonik tənliklərlə təyin olunar:

$$\frac{x - x_0}{N_1} = \frac{y - y_0}{N_2} = \frac{z - z_0}{N_3} . \qquad (6)$$

Hamar F səthi parametrik tənliklərlə verildiyi halda $\vec{N}=[\vec{r}_u,\vec{r}_v]$ olduğuna görə, əvvəlcə $\vec{r}_u=(x_u,y_u,z_u)$ və $\vec{r}_v=(x_v,y_v,z_v)$ vektorları təyin olunur, sonra isə (5) və (6) tənlikləri yazılır. Bu halda (5) və (6) tənlikləri belə yazılar:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}=0\,,$$

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}\,.$$

Əgər F səthi qeyri-aşkar tənliklə verilmişdirsə, onda toxunan müstəvi və normalın tənliklərini yazmaq üçün aşağıdakı teoremdən istifadə etmək lazımdır.

Teorem 2. *Əgər hamar səth qeyri-aşkar* $F(x,y,z)=0$ *tənliyi ilə verilmişdirsə, onda* $\vec{N}(F_x,F_y,F_z)$ *vektoru sıfırdan fərqli vektor olub, həmin səthə uyğun nöqtədə toxunan müs-təviyə perpendikulyardır.*

İsbatı. Verilmiş səth hamar olduğundan, $rang\left\|F_x,F_y,F_z\right\|=1,$ ona görə də $\vec{N}-$ sıfırdan fərqli vektordur. Göstərək ki, $\vec{N}$ vektoru səthə M_0 nöqtəsində toxunan müs-təviyə perpendikulyardır. Bundan ötrü $\vec{N}$ vektorunun verilmiş səth üzərində yerləşən və M_0 nöqtəsindən keçən ixtiyari hamar γ xəttinə bu nöqtədə toxunan düz xəttə perpendikulyar olduğunu əsaslandırmaq lazımdır.

Tutaq ki, γ xətti $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ tənlikləri ilə verilmişdir. Aydındır ki, γ xəttinin parametri t olan istənilən nöqtəsində $F(x(t),y(t),z(t))=0$ bərabərliyi ödənilir. Bu eyniliyi t dəyişəninə görə diferensiallasaq, alarıq:

$$F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}+F_x\frac{dz}{dt}=0\,.$$

Bu bərabərlik M_0 nöqtəsində də doğrudur, deməli, $\vec{N}$ vektoru M_0 nöqtəsində γ xəttinə toxunan $\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)$ vektoruna perpen-dikulyardır.

Səthə[redacted]toxunan müstəvi və normalın tənliklərinin tapılması ilə bağlı məsələ həlli nümunələrinə baxaq.

Məsələ 1. $x=u\cos v, y=u\sin v, z=bv, b>0,(u,v)\in R^2$ tənlikləri ilə verilmiş düz helikoidə $M_0(u_0,v_0)$ nöqtəsində toxunan müstəvinin və normalın tənliklərini yazın.

Həlli. $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ vektorlarının M_0 nöqtəsində

$$\vec{r}_u(\cos v_0,\sin v_0,0) \text{ və } \vec{r}_v(-u_0\sin v_0,u_0\cos v_0,b)$$

koordinatları vardır. Ona görə də $\vec{N}=[\vec{r}_u,\vec{r}_v]$ vektoru aşağıdakı koordinatlara malik olar:

$$\vec{N}=\left(\begin{vmatrix} \sin v_0 & 0 \\ u_0\cos v_0 & b \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 0 & \cos v_0 \\ b & -u_0\sin v_0 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} \cos v_0 & \sin v_0 \\ -u_0\sin v_0 & u_0\cos v_0 \end{vmatrix}\right)=$$

$$=\left(b\sin v_0,-b\cos v_0,u_0\right).$$

(5) düsturuna əsasən toxunan müstəvinin tənliyini yazaq:

$$(x-x_0)b\sin v_0-(y-y_0)b\cos v_0+(z-z_0)u_0=0\,. \qquad (7)$$

$x_0=u_0\cos v_0, y_0=u_0\sin v_0, z_0=bv_0$ olduğunu nəzərə alsaq, ele-mentar çevirmələrin köməyi ilə (7) tənliyini

$$xb\sin v_0-yb\cos v_0+zu_0-bu_0v_0=0$$

şəklinə gətirmiş oluruq.

M_0 nöqtəsində normalın tənliyini isə (6) tənliyinə əsasən yazırıq:

$$\frac{x-u_0\cos v_0}{b\sin v_0}=\frac{y-u_0\sin v_0}{-b\cos v_0}=\frac{z-bv_0}{u_0}\,.$$

Məsələ 2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ kanonik tənliyi ilə verilmiş ellipsoidə $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nöqtəsində toxunan müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli. İsbat etdiyimiz teorem 2-yə görə ellipsoidə $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nöqtəsində toxunan müstəviyə perpendikulyar olan $\vec{N}$ vektorunun $\vec{N}\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)$ koordinatları vardır. Ona görə də (5) tənliyi belə yazılar:

$$(x-x_0)\frac{2x_0}{a^2}+(y-y_0)\frac{2y_0}{b^2}+(z-z_0)\frac{2z_0}{c^2}=0. \tag{8}$$

M_0 nöqtəsi ellipsoid üzərində yerləşdiyindən,

$\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}+\frac{z_0{}^2}{c^2}=1$ bərabərliyi ödənilir. Nəticədə (8) tənliyi

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$$

şəklində yazılır.

Xüsusi halda $x^2+y^2+z^2=1$ tənliyi ilə verilmiş a radiuslu sferaya toxunan müstəvinin tənliyi $xx_0+yy_0+zz_0=1$ şəklindədir.

Məsələ 3. $xyz=1$ səthinə elə toxunan müstəvi keçirin ki, $x+y+z-3=0$ müstəvisinə paralel olsun.

Həlli. Verilmiş səth üçün $F(x,y,z)=xyz-1$ olduğundan, $\vec{N}=(F_x,F_y,F_z)=(yz,xz,xy)$. Tutaq ki, toxunma nöqtəsi $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nöqtəsidir. Onda $\vec{N}=(y_0z_0,x_0z_0,x_0y_0)$. Toxunan müstəvinin (5) tənliyini yazaq:

$$(x-x_0)y_0z_0+(y-y_0)x_0z_0+(z-z_0)x_0y_0=0. \tag{9}$$

M_0 nöqtəsi səth üzərində yerləşdiyindən, $x_0y_0z_0=1$. Bu münasibəti nəzərə alsaq, (9) tənliyi belə yazılar:

$$xy_0z_0+yx_0z_0+zx_0y_0-3=0. \tag{10}$$

(10) müstəvisinin $x+y+z-3=0$ müstəvisinə paralellik şərtlərini ya-zaq: $\frac{y_0z_0}{1}=\frac{x_0z_0}{1}=\frac{x_0y_0}{1}$ və ya $y_0z_0=x_0z_0=x_0y_0$. Bu bərabərliklər-dən və $x_0y_0z_0=1$ şərtindən müəyyən edirik ki, $x_0=y_0=z_0=1$. Be-ləliklə, axtarılan toxunan müstəvi $x+y+z-3=0$ müstəvisinin özüdür.

Mühazirə 17

SƏTHİN BİRİNCİ KVADRATİK FORMASI

1. Tutaq ki, hamar F hamar səthi

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v) \tag{1}$$

tənliyi ilə verilmişdir. Məlumdur ki, istənilən $M\in F$ nöqtəsində $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyasının diferensialı $d\vec{r}=\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv$ ifadəsinə malikdir (bax, mühazirə 15, bənd 1, (4) düsturu).

(1) düsturundan alırıq ki,

$$(d\vec{r})^2=(\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv)\cdot(\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv)=g_{11}(du)^2+2g_{12}dudv+g_{22}(dv)^2, \tag{2}$$

burada

$$g_{11}=\vec{r}_u^{\,2},\ g_{12}=g_{21}=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v,\ g_{22}=\vec{r}_v^{\,2} \tag{3}$$

işarə olunmuşdur.

(2) düsturunun sağ tərəfi F hamar səthinə M nöqtəsində to-xunan $(M,\vec{r}_u,\vec{r}_v)$ müstəvisində təyin olunan kvadratik formadır. Bu kvadratik formanı φ_1 ilə işarə edir və F hamar səthinin *birinci kvadratik forması*, yaxud *xətti elementi* adlandırırlar. $d\vec{r}\neq\vec{0}$ olduğuna görə (F

hamar səthdir), $(d\vec{r})^2 > 0$. Bu isə onu göstərir ki, φ_1 kvadratik forması müsbət-müəyyən formadır.

Qeyd edək ki, $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ vektorları F səthi üzərində M nöqtəsi-nin u və v əyrixətli koordinatlarının vektor-funksiyalarıdır. Ona görə də φ_1 kvadratik formasının (3) əmsalları da u və v əyrixətli koordinat-larının funksiyalarıdır.

(1) tənliyi ilə verilən F səthi üzərində yerləşən hamar

$$u = u(t), \quad v = v(t) \tag{4}$$

γ xəttinə baxaq, burada t parametri müəyyən I aralığında dəyişir. γ xətti fəzada $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$ tənliyi ilə verilir. Bu tənliyi t parametrinə görə diferensiallamaqla, alırıq:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}. \tag{5}$$

Xətlər nəzəriyyəsindən məlumdur ki, $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$, burada s γ xəttinin qövs uzunluğudur (bax, mühazirə 12, bənd 2, (7) düsturu). Bu düsturdan (3) və (5) bərabərliklərinə əsasən alırıq:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2} = \sqrt{g_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2g_{11}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + g_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}. \tag{6}$$

(6) bərabərliyindən aydın olur ki,

$$(ds)^2 = g_{11}(du)^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}(dv)^2. \tag{7}$$

Beləliklə, *səthin birinci kvadratik formasının qiyməti səth üzərin-də yerləşən hamar xətt üzrə nöqtənin sonsuz kiçik yerdəyişməsi zamanı bu xəttin qövs uzunluğunun diferensialının kvadratına bərabərdir.*

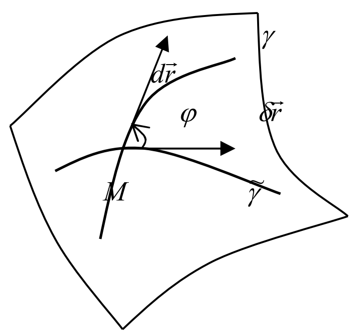
(6) düsturundan γ xəttinin ucları $M_1(t_1)$ və $M_2(t_2)$ $(t_1 < t_2)$ nöqtələrində olan qövsünün uzunluğunu hesablamaq üçün aşağıdakı düstur alınır:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2g_{11}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + g_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{8}$$

2. Tutaq ki, γ və $\tilde{\gamma}$ - F səthi üzərində yerləşən və M nöqtəsin-dən keçən hamar xətlərdir. *γ və $\tilde{\gamma}$ xətləri arasında qalan bucaq dedikdə bu xətlərə onların ortaq M nöqtəsində çəkilən toxunanlar arasındakı bucaq ğaşa düşülür.*

γ və $\tilde{\gamma}$ xətləri boyunca dife-rensiallamaları d və δ ilə işarə edək. Deməli, γ və $\tilde{\gamma}$ xətlərinə M nöqtə-sində toxunan vektorlar $d\vec{r}$ və $\delta\vec{r}$ vektorlarıdır (şək. 1). γ və $\tilde{\gamma}$ xətlə-ri arasındakı φ bucağını $d\vec{r}$ və $\delta\vec{r}$ vektorları arasında qalan bucaq ki-mi hesablamaq olar:

$$\cos\varphi = \frac{d\vec{r}\cdot\delta\vec{r}}{|d\vec{r}||\delta\vec{r}|}. \tag{9}$$



Şəkil 1

Aşkardır ki,

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv, \quad \delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v.$$

Bu qiymətləri (9) düsturunda yerinə yazıb, (3) bərabərliklərini nəzərə alaq:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)\cdot(\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v)}{\sqrt{(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2}\sqrt{(\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v dv)^2}} =$$

$$= \frac{g_{11}du\delta u + g_{12}(du\delta v + dv\delta u) + g_{22}dv\delta v}{\sqrt{g_{11}(du)^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}(du)^2}\sqrt{g_{11}(\delta u)^2 + 2g_{12}\delta u\delta v + g_{22}(\delta v)^2}}. \tag{10}$$

(10) düsturu, xüsusi halda, səthin koordinat xətləri arasında qalan bucağı hesablamağa imkan verir. Tutaq ki, γ - səthin u xəttidir (yəni $dv=0$ şərtini ödəyir), $\widetilde{\gamma}$ isə səthin v xəttidir (yəni $\delta u=0$ şərtini ödəyir). Onda $dv=0$ və $\delta u=0$ şərtlərini (10) düsturunda nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$\cos\varphi=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}. \qquad (11)$$

(11) düsturundan aşağıdakı mühüm nəticə alınır: *Səth üzərində koordinat şəbəkəsinin ortoqonal olması üçün* ($\varphi=\frac{\pi}{2}$) *zəruri və kafi şərt bu səthin hər bir nöqtəsində* $\gamma_{12}=0$ *bərabərliyinin ödənilməsidir.*

3. Əgər F hamar səthi düzbucaqlı dekart koordinat sistemində $F(x,y,z)=0$ (12)

qeyri-aşkar tənliyi ilə verilmişdirsə, onda bu səthin φ_1 – birinci kvad-ratik forması (12) şərti daxilində $dx^2+dy^2+dz^2$ kvadratik forması olur. (12) bərabərliyini diferensiallamaqla, alırıq:

$$F_x dx+F_y dy+F_z dz=0. \qquad (13)$$

Əgər səthin baxılan nöqtəsində $F_z\neq 0$ olarsa, onda (13) bəra-bərliyindən yaza bilərik:

$$dz=-\left(\frac{F_x}{F_z}\right)dx-\left(\frac{F_y}{F_z}\right)dy.$$

Ona görə də (12) səthi üzərində birinci kvadratik forma $x=u, y=v$ şərtləri daxilində aşağıdakı ifadəyə malikdir:

$$dx^2+dy^2+dz^2=dx^2+dy^2+\left(\left(\frac{F_x}{F_z}\right)dx+\left(\frac{F_y}{F_z}\right)dy\right)^2. \qquad (14)$$

(14) bərabərliyindən müəyyən edirik:

$$g_{11}=1+\frac{F_x^2}{F_z^2},\quad g_{12}=\frac{F_xF_y}{F_z^2},\quad g_{22}=1+\frac{F_y^2}{F_z^2}, \qquad (15)$$

burada $x=u,\ y=v.$

Əgər F hamar səthi $z=f(x,y)$ tənliyi ilə verilmişdirsə, onda bu səth $x=u, y=v, z=f(u,v)$ parametrik tənliklərinə malik olur. Bu halda $\vec{r}_u=\vec{r}_x=(1,0,f_x), \vec{r}_v=\vec{r}_y=(0,1,f_y)$ olduğuna görə, birinci kvadra-tik forma əmsalları aşağıdakı kimi hesablanırlar:

$$g_{11}=1+f_x^2,\quad g_{12}=\vec{r}_x\vec{r}_y=f_xf_y,\quad g_{22}=1+f_y^2. \qquad (16)$$

4. Tutaq ki, F – hamar səthdir. Bu səthi kiçik k oblastlarına ayıraq. Bu oblastlardan hər birinin üzərində hər-hansı P nöqtəsini götürək və k oblastını P nöqtəsindəki toxunan müstəviyə proyek-siyalayaq. Tutaq ki, $\sigma(k)$ – k oblastının proyeksiyasının sahəsidir. F *səthinin sahəsi* dedikdə, F səthinin bölündüyü k oblastlarının ölçülə-rinə görə qeyri məhdud olaraq kiçilməsi şərti daxilində

$$S=\lim\sum_k \sigma(k)$$

limiti başa düşülür.

F hamar səthinin (1) parametrik tənliyi ilə verildiyi halda onun sahəsinin düsturunu çıxaraq. P nöqtəsini koordinat başlanğıcı, bu nöqtədəki (P,r_u,r_v) toxunan müstəvisini isə xy müstəvisi qəbul etməklə x,y,z düzbucaqlı dekart koordinatlarını daxil edək. Tutaq ki, bu koordinatlarda F səthi k oblastında

$$x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$$

tənlikləri ilə verilir.

k oblastının kafi qədər kiçik ölçülərində onun toxunan müs-təviyə (yəni xy müstəvisinə) proyeksiyası birqiymətlidir, ona görə də proyeksiya üzərində u,v dəyişənlərinə əyrixətli koordinatlar kimi baxıla bilər. Riyazi analiz kursundan məlumdur ki, müstəvi oblastının sahəsi əyrixətli koordinatlarda

$$\sigma = \iint \left| \begin{vmatrix} x_u & y_v \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right| dudv \tag{17}$$

düsturu ilə hesablanır.

(17) düsturundakı inteqralaltı ifadəni

$$\left| \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right| = \left| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \cdot \vec{n}_P \right|$$

şəklində yazmaq olar, burada $\vec{n}_P - P$ nöqtəsində səthin normalının vahid vektorudur: $\vec{n}_P = \pm(0,0,1)$. Nəticədə

$$\sum_k \sigma(k) = \iint_F \left| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \cdot \vec{n}^* \right| dudv$$

bərabərliyini yaza bilərik, burada $\vec{n}^*$ – səth üzərində elə vektor-funk-siyadır ki, k oblastlarından hər birində sabit olub, bu oblastda qeyd olunmuş P nöqtəsində normalın vahid vektoruna bərabərdir. Əgər sonuncu bərabərlikdə k oblastlarının ölçülərinə görə kiçilməsi şərti daxilində limitə keçsək, səthin sahəsi üçün

$$S = \iint_F \left| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \cdot \vec{n} \right| dudv \tag{18}$$

düsturunu alarıq, burada $\vec{n}$ – səthin normalının vahid vektorudur.

$[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ – səthin normalının yönəldici vektoru olduğundan, $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ və $\vec{n}$ vektorları kollineardırlar. Ona görə də (18) düsturunu

$$S = \iint_F \left| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \right| dudv \tag{19}$$

şəklində yazmaq olar.

Göstərək ki, F səthinin hər bir (u,v) nöqtəsində

$$\left| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \right| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\ . \tag{20}$$

Doğrudan da, əgər $\varphi = \vec{r}_u \hat{}\, \vec{r}_v$ qəbul etsək, onda

$$\left| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \right| = |\vec{r}_u||\vec{r}_v| \sin\varphi = |\vec{r}_u||\vec{r}_v| \sqrt{1 - \cos^2\varphi}\ .$$

Buradan (3) və (11) düsturlarından istifadə etməklə alarıq:

$$\left| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \right| = \sqrt{\vec{r}_u^{\,2}}\sqrt{\vec{r}_v^{\,2}}\sqrt{1 - \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right)^2} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\ .$$

Beləliklə, (20) bərabərliyinə əsasən F səthinin sahəsinin hesab-lanması üçün

$$S = \iint_F \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, dudv \tag{21}$$

düsturunu yaza bilərik.

Əgər F hamar səthi $z = f(x,y)$ tənliyi ilə verilərsə, onda (16) və (21) düsturlarından istifadə etməklə, F səthinin sahəsini hesablamaq üçün

$$S = \iint \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy$$

düsturunu alarıq.

Qeyd. Yuxarıdakılardan aydın olur ki, səthin birinci kvadratik formasını bilməklə metrik xarakterli aşağıdakı məsələləri həll etmək mümkündür:

1. Səth üzərində yerləşən hamar xəttin qövs uzunluğunun hesab-lanması;
2. Səth üzərində yerləşən və ortaq nöqtəyə malik olan iki hamar xətt arasında qalan bucağın hesablanması;
3. Hamar səthin sahəsinin hesablanması.

Birinci kvadratik formanın qeyd olunan tətbiqlərini nəzərə almaqla onu verilmiş *səthin metrik forması* da adlandırırlar.

Mühazirə 18

SƏTHİN İKİNCİ KVADRATİK FORMASI

1. Tutaq ki, C^k $(k > 0)$ sinifindən olan hamar F səthi

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \qquad (1)$$

tənliyi ilə verilmişdir. Bu səth üzərində yerləşən γ xəttinə baxaq (şək.1). M nöqtəsi γ xətti boyunca yerinidəyişdikdə $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ bərabər-liyi doğru olur. Bu bərabərlikdən alırıq:

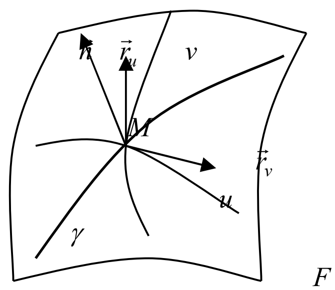
$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu}(du)^2 + 2\vec{r}_{uv}dudv + \vec{r}_{vv}(dv)^2 + \vec{r}_u d^2u + \vec{r}_v d^2v\,, \qquad (2)$$

burada $\vec{r}_{uu} = \dfrac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}, \vec{r}_{uv} = \vec{r}_{vu} = \dfrac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}, \vec{r}_{vv} = \dfrac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}$.

Məlumdur ki, səthin normal düz xəttinin $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ yönəldici vektorunun uzunluğu $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$ ədədinə bərabərdir (bax, mühazirə 17, (20) düsturu). Ona görə də

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} \qquad (3)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $\vec{n}$ vektoru hər bir (u,v) nöqtəsində F səthinin normal vektorudur.



Şəkil 1

$\vec{n}\vec{r}_u = \vec{n}\vec{r}_v = 0$ olduğundan, (2) bərabərliyini $\vec{n}$ vektoruna skalyar vur-maqla alarıq:

$$\vec{n}d^2\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_{uu}(du)^2 + 2\vec{n}\vec{r}_{uv}dudv + \vec{n}\vec{r}_{vv}(dv)^2. \qquad (4)$$

Aşağıdakı işarələmələri daxil edək:

$$\vec{n}\vec{r}_{uu} = h_{11}, \vec{n}\vec{r}_{uv} = h_{12} = h_{21}, \vec{n}\vec{r}_{vv} = h_{22}\,. \qquad (5)$$

(3) bərabərliyinə əsasən (5) düsturlarını aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$h_{11} = \frac{\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}, h_{12} = h_{21} = \frac{\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uv}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}, h_{22} = \frac{\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{vv}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}. \qquad (6)$$

(6) düsturlarındakı kəsrlərin surətlərindəki ifadələr göstərilən vektorların qarışıq törəmələridir. Nəticədə (4) bərabərliyi aşağıdakı kimi yazılar:

$$\vec{n} \cdot d^2\vec{r} = h_{11}(du)^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}(dv)^2\,. \qquad (7)$$

(7) bərabərliyinin sağ tərəfi F səthinə M nöqtəsində toxunan müstəvidə təyin olunmuş kvadratik formadır.

$$\varphi_2 = h_{11}(du)^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}(dv)^2$$

kvadratik formasına *səthin ikinci kvadratik forması* deyilir. Yalnız müs-təvi üzərində yerləşən səthlər üçün bu kvadratik forma eynilik kimi sıfra bərabərdir (belə səthin hər bir nöqtəsində $h_{11} = h_{12} = h_{22} = 0$ olur).

İkinci kvadratik forma əmsalları (6) düsturları ilə hesablanırlar. $\vec{n}\vec{r}_u = \vec{n}\vec{r}_v = 0$ şərtləri ikinci kvadratik forma əmsallarının hesablan-masının (6) düsturlarından fərqli düsturlarını müəyyən etməyə imkan verir. Doğrudan da, əgər $\vec{n}\vec{r}_u = 0$ bərabərliyini əvvəlcə u parametrinə görə, sonra isə v parametrinə görə diferensiallasaq, alarıq:

$$\vec{n}_u\vec{r}_u + \vec{n}\vec{r}_{uu} = 0, \quad \vec{n}_v\vec{r}_u + \vec{n}\vec{r}_{uv} = 0,$$

və ya

$$h_{11} = -\vec{n}_u\vec{r}_u, \quad h_{12} = -\vec{n}_v\vec{r}_u\,, \qquad (8)$$

burada $\vec{n}_u = \dfrac{\partial \vec{n}}{\partial u}, \vec{n}_v = \dfrac{\partial \vec{n}}{\partial v}$. Digər tərəfdən, $\vec{n}\vec{r}_v = 0$ bərabərliyini u və v parametrlərinə görə diferensiallamaqla

$$h_{21} = -\vec{n}_u\vec{r}_v, \quad h_{22} = -\vec{n}_v\vec{r}_v \qquad (9)$$

düsturlarını alırıq.

$\vec{r}$ və $\vec{n}$ vektorlarının diferensiallarının $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ və $d\vec{n} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv$ ifadələrini, eyni zamanda $h_{12} = h_{21}$ şərti daxilində (8) və (9) düsturlarını nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$d\vec{n}d\vec{r} = (\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv)(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) =$$
$$-h_{11}(du)^2 - 2h_{12}dudv - h_{22}(dv)^2 = -\varphi_2 .$$

Beləliklə,

$$\varphi_2 = -d\vec{n}d\vec{r} . \qquad (10)$$

2. Tutaq ki, (1) səthi üzərindəki γ xətti $u = u(s), v = v(s)$ daxili tənlikləri ilə verilmişdir, burada $s-$ təbii parametrdir. γ xəttinə M nöqtəsində toxunan $\vec{\tau}$ vahid vektorunu təyin edək:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds} . \qquad (11)$$

Frene düsturuna görə, $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}$ (bax, mühazirə 13, bənd 3), bu-rada k γ xəttinin M nöqtəsindəki əyriliyidir, $\vec{\nu}$ isə həmin nöqtədə baş normalın vahid vektorudur. (11) düsturundan yaza bilərik:

$$k\vec{\nu} = \vec{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2} . \qquad (12)$$

(12) bərabərliyini $\vec{n}$ vektoruna skalyar vuraq və (5) düsturlarını nəzərə alaq:

$$\vec{n}(k\vec{\nu}) = \frac{h_{11}(du)^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}(du)^2}{ds^2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} . \qquad (13)$$

(13) bərabərliyinin sağ tərəfini $\gamma \subset F$ xəttinin M nöqtəsində *normal əyriliyi* adlandırırlar və k_n ilə işarə edirlər. Beləliklə, əgər $\theta = (\vec{n} \,\hat{,}\, \vec{\nu})$ işarə etsək, onda $k_n = \vec{n}(k\vec{\nu}) = k\cos\theta$.

F səthinin M nöqtəsindəki normalından keçən müstəvi ilə kəsişməsindən alınan xəttə bu səthin *normal kəsiyi* deyilir. Aşkardır ki, γ xətti F səthinin normal kəsiyi olduqda ya $\vec{n} = \vec{\nu}$, ya da $\vec{n} = -\vec{\nu}$ olur. Birinci halda $k_n = k$, ikinci halda isə $k_n = -k$ bərabərliyi ödənilir. Belə-liklə, normal kəsiyin normal əyriliyinin mütləq qiyməti bu kəsiyin M nöqtəsindəki əyriliyinə bərabərdir.

(13) bərabərliyini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$k_n = \frac{h_{11}(du)^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}(dv)^2}{g_{11}(du)^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}(dv)^2} . \qquad (14)$$

γ hamar xətt olduğundan, onun heç bir nöqtəsində du və dv diferensialları eyni vaxtda sıfra bərabər olmurlar. Müəyyənlik üçün $dv \neq 0$ qəbul edək. $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ bərabərliyindən alınır ki, $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$

toxunan müstəvisində M nöqtəsində γ xəttinə toxunan düz xəttinin istiqaməti $\lambda = \frac{du}{dv}$ nisbəti ilə təyin olunur. Əgər (14) bərabərliyinin surət və məxrəcini $(dv)^2-$ na bölsək, alarıq:

$$k_n = \frac{h_{11}\lambda^2 + 2h_{12}\lambda + h_{22}}{g_{11}\lambda^2 + 2g_{12}\lambda + g_{22}} . \qquad (15)$$

(15) bərabərliyi göstərir ki, *$\gamma \subset F$ xəttinin M nöqtəsində nor-mal əyriliyi yalnız toxunanın istiqamətindən asılıdır.* Ona görə də, *səthin M nöqtəsindən keçən və bu nöqtədə ortaq toxunanı olan bütün hamar xətlərinin M nöqtəsində eyni normal əyriliyi vardır.*

3. Tutaq ki, F hamar səthi $z = f(x, y)$ tənliyi ilə verilmişdir. Bilirik ki, bu halda F səthi $x = u, y = v, z = f(u, v)$ parametrik tənliklərinə malik olur. Koordinat vektorları $\vec{r}_u = \vec{r}_x = (1, 0, f_x)$ və $\vec{r}_v = \vec{r}_y = (0, 1, f_y)$ şəklində təyin olunduqlarından,

$$\vec{r}_{uu} = (0, 0, f_{xx}),\ \vec{r}_{uv} = (0, 0, f_{xy}),\ \vec{r}_{vv} = (0, 0, f_{yy}) . \qquad (16)$$

Koordinat vektorlarının vektorial hasilini təyin edək:

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \left(\begin{vmatrix} 0 & f_x \\ 1 & f_y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_x & 1 \\ f_y & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-f_x, -f_y, 1) . \qquad (17)$$

(16) düsturundan alınır ki, F səthinin vahid normal vektoru

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \tag{18}$$

koordinatlarına malikdir.

(16) və (18) bərabərliklərini nəzərə almaqla (5) düsturlarının köməyi ilə ikinci kvadratik forma əmsallarını təyin edək:

$$h_{11} = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad h_{12} = h_{21} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad h_{22} = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \tag{19}$$

Mühazirə 19

SƏTHİN DÜPEN İNDİKATRİSASI, BAŞ ƏYRİLİKLƏRİ. TAM VƏ ORTA ƏYRİLİKLƏR

1. Tutaq ki,

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) \tag{1}$$

tənliyi ilə hamar F səthi verilmişdir. F səthinin ixtiyari M nöqtəsinə baxaq. Fərz edək ki, M nöqtəsində ikinci kvadratik formanın h_{11}, h_{12}, h_{22} əmsallarından heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir (əks halda M nöqtəsindən keçən ixtiyari xəttin normal əyriliyi sıfra bərabər olardı, bax, mühazirə 18, (14) düsturu).

F səthi üzərində yerləşən və M nöqtəsindən keçən elə xətlərə baxaq ki, onların M nöqtəsindəki toxunanları müxtəlif olsun. Bu xətlərin normal əyrilikləri arasındakı əlaqəni müəyyən edək. F səthinin $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ toxunan müstəvisində mərkəzi M nöqtəsində olan Ω düz xətlər dəstəsini nəzərdən keçirək. Ω dəstəsinin hər bir düz xətti üzərində M nöqtəsindən hər iki tərəfdə uzunluğu $\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}$ ədədinə bərabər olan parçalar ayıraq, burada $k_n -$ səth üzərində verilmiş düz xəttin toxunanı olduğu xəttin sıfırdan fərqli normal əyriliyidir.

Yuxarıdakı qayda ilə ayırdığımız parçaların uc nöqtələrinin (M nöqtəsindən fərqli) əmələ gətirdiyi xəttə səthin M nöqtəsində *əyrilik indikatrisası* (və ya *Düpen indikatrisası*) deyilir. $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ toxunan müstəvisində $M\vec{r}_u\vec{r}_v$ afin koordinat sistemini daxil edək və M nöqtəsin-də Düpen indikatrisasının tənliyini çıxaraq. Tutaq ki, $P(x, y) -$ Düpen indikatrisasının ixtiyari nöqtəsidir, $\vec{\tau} - MP$ düz xəttinin vahid yönəldici vektorudur, $u = u(s), v = v(s) -$ səth üzərində $\vec{\tau}$ vektorunun M nöqtə-sində vahid toxunan vektoru olduğu müəyyən hamar xəttin daxili tənlikləridir, $s -$ təbii parametrdir. Onda qurmaya əsasən,

$$\overrightarrow{MP} = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \vec{\tau}. \tag{2}$$

$\overrightarrow{MP}$ vektoru M nöqtəsinin radius-vektoru olduğundan,

$$\overrightarrow{MP} = x\vec{r}_u + y\vec{r}_u. \tag{3}$$

Digər tərəfdən, $\vec{\tau}$ vektoru aşağıdakı ayrılışa malikdir:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}. \tag{4}$$

(3) və (4) düsturlarını (2) bərabərliyində nəzərə alaq:

$$x\vec{r}_u + y\vec{r}_u = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \left(\vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds} \right). \tag{5}$$

$\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ vektorları kollinear olmadıqlarından, (5) bərabərliyindən yaza bilərik:

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \frac{du}{ds}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \frac{dv}{ds}. \tag{6}$$

Normal əyriliyin $k_n = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ ifadəsini aşağıdakı kimi çevirək:

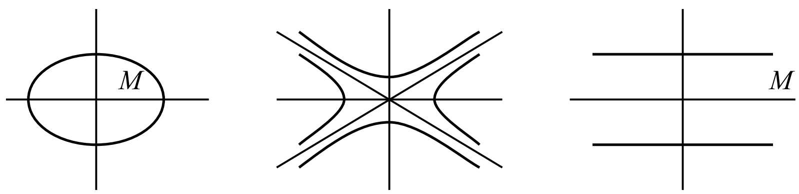
$$k_n = h_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2h_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + h_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2. \quad (7)$$

(7) bərabərliyində $\frac{du}{ds}$ və $\frac{dv}{ds}$ törəmələrinin (6) bərabərliklərin-dən olan ifadələrini nəzərə alıb, k_n – ə ixtisar etsək, M nöqtəsində Düpen indikatrisasının aşağıdakı tənliyini alarıq:

$$h_{11}x^2 + 2h_{12}xy + h_{22}y^2 = \pm 1. \quad (8)$$

(8) tənliyində h_{11}, h_{12}, h_{22} - eyni vaxtda sıfra bərabər olmayan həqiqi ədədlər olduğundan, aşağıdakı hallar mümkündür:

1) $h_{11}h_{22} - h_{12}^2 > 0$. (8) tənlikləri ilə ellips təyin olunur (şək. 1, a).



a) b) c)

Şəkil 1

Bu halda M nöqtəsinə F səthinin *elliptik nöqtəsi* deyilir. Xüsusi halda, Düpen indikatrisası çevrə olduqda M nöqtəsi *ombilik nöqtəsi* adlanır.

2) $h_{11}h_{22} - h_{12}^2 < 0$. (8) tənlikləri ilə qoşma hiperbolalar cütü təyin olunur (şək.1, b). Bu halda M nöqtəsinə səthin *hiperbolik nöqtəsi* deyilir.

3) $h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = 0$. (8) tənlikləri ilə paralel düz xətlər cütü təyin olunur(şək.1, c). Bu halda M nöqtəsi səthin *parabolik nöqtəsi* adlanır.

2. M nöqtəsində Düpen indikatrisasının baş istiqamətlərinə bu nöqtədə səthin *baş istiqamətləri* deyilir. F səthinin qeyri-ombilik nöq-təsində yeganə baş istiqamətlər cütü vardır. Ombilik nöqtəsində isə ixtiyari istiqamət baş istiqamətdir.

Tutaq ki, $M \subset F$ nöqtəsində baş istiqamətlər $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ və $\delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v$ vektorları ilə təyin olunurlar. Analitik həndəsə kursundan ikitərtibli xəttin baş istiqamətlərinin tərifinə görə, $d\vec{r}$ və $\delta\vec{r}$ vektorları həm ortoqonaldırlar, həm də Düpen indikatrisasına nəzərən qoşmadırlar. Beləliklə, $d\vec{r}\delta\vec{r} = 0$ (ortoqonallıq şərti) və $h_{11}du\delta u + + h_{12}du\delta v + h_{21}dv\delta u + h_{22}dv\delta v = 0$ (qoşmalıq şərti) bərabərlikləri doğru-dur. Göstərək ki, qoşmalıq şərti $d\vec{n}\delta\vec{r} = 0$ şəklində yazıla bilər, burada $d\vec{n}$ normalın vahid vektorunun M nöqtəsinin səth üzərində $d\vec{r}$ yerdə-yişməsinə uyğun olan diferensialıdır. Bundan ötrü qoşmalıq şərtini ifadə edən bərabərliyin sol tərəfində ikinci kvadratik forma əmsallarını onların

$$h_{11} = -\vec{n}_u\vec{r}_u, h_{12} = h_{21} = -\vec{n}_v\vec{r}_u = -\vec{n}_u\vec{r}_v, h_{22} = -\vec{n}_v\vec{r}_v$$

düsturlarından olan ifadələri ilə əvəz edək:

$$-\vec{n}_u\vec{r}_u du\delta u - \vec{n}_u\vec{r}_v du\delta v - \vec{n}_v\vec{r}_u dv\delta u - \vec{n}_v\vec{r}_v dv\delta v = 0,$$

və ya

$$(\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv)(\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v) = 0 \Rightarrow d\vec{n}\delta\vec{r} = 0.$$

Beləliklə, $d\vec{r}$ və $\delta\vec{r}$ vektorlarının F səthinin M nöqtəsində baş istiqamətləri təyin etməsi üçün zəruri və kafi şərt bu vektorların

$$d\vec{r}\delta\vec{r} = 0 \text{ və } d\vec{n}\delta\vec{r} = 0 \quad (9)$$

bərabərliklərini ödəməsidir.

(9) bərabərlikləri Rodriq teoremi adlanan aşağıdakı teoremi isbat etməyə imkan verir:

Teorem. (1) *səthinin* M *nöqtəsində* $d\vec{r}$ *istiqamətinin baş istiqamət olması üçün zəruri və kafi şərt*

$$d\vec{n} = -kd\vec{r} \quad (10)$$

bərabərliyinin ödənilməsidir, burada $d\vec{n}$ *normialın vahid vektorunun* M *nöqtəsinin* $d\vec{r}$ *sürüşməsinə uyğun olan diferensialıdır,* k *isə* $d\vec{r}$ *istiqaməti üzrə normal əyrilikdir.*

İsbatı. Tutaq ki, $d\vec{r}$ vektorunun istiqaməti M nöqtəsində baş istiqamətdir. Onda (9) bərabərlikləri doğrudur, burada $\delta\vec{r}$ - M nöqtəsin-də digər baş istiqamətdir: $d\vec{r}\delta\vec{r}=0$. $\vec{n}$ vahid vektor olduğundan, $\vec{n}_u$ və $\vec{n}_v$ xüsusi törəmələri onun özünə ortoqonaldırlar: $\vec{n}_u \perp \vec{n}, \vec{n}_v \perp \vec{n}$. Digər tərəfdən, $d\vec{n}=\vec{n}_u du+\vec{n}_v dv$ ayrılışından alınır ki, $d\vec{n}$ vektoru da $\vec{n}$ vek-toruna ortoqonaldır, yəni $(M,\vec{r}_u,\vec{r}_v)$ toxunan müstəvisində yerləşir. Bu şərt daxilində (9) bərabərliklərindən müəyyən edirik ki, $d\vec{n}$ və dr vektorları kollineardırlar, yəni elə λ həqiqi ədədi vardır ki,

$$d\vec{n}=\lambda d\vec{r}\,. \tag{11}$$

İsbat edək ki, $\lambda=-k$. (11) bərabərliyini $\frac{d\vec{n}}{ds}=\lambda\frac{d\vec{r}}{ds}$ şəklində yazaq. Bu bərabərliyin hər iki tərəfini $\frac{d\vec{r}}{ds}$ vektoruna vuraq və bu za-man $dnd\vec{r}=-\varphi_2,(ds)^2=\varphi_1$ düsturlarını, eləcə də $\frac{d\vec{r}}{ds}$ vektorunun vahid vektor olması şərtini nəzərə alaq:

$$\frac{d\vec{n}}{ds}\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{d\vec{n}d\vec{r}}{(ds)^2}=\frac{-\varphi_2}{\varphi_1}=-k=\lambda\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d\vec{r}}{ds}=\lambda\,,$$

və ya $\lambda=-k$, burada k - $d\vec{r}$ istiqaməti üzrə normal əyrilikdir.

Tərsinə: tutaq ki, (10) bərabərliyi ödənilir. İsbat edək ki, $d\vec{r}$ baş istiqamət təyin edir. $(M,\vec{r}_u,\vec{r}_v)$ toxunan müstəvisində $d\vec{r}$ istiqamətinə perpendikulyar olan $\delta\vec{r}$ istiqamətini götürək, onda $d\vec{r}\delta\vec{r}=0$. $d\vec{n}=-kd\vec{r}$ olduğundan, $d\vec{n}\delta r=(-kd\vec{r})\delta\vec{r}=-k(d\vec{r}\delta\vec{r})=0$. Göründüyü kimi, (9) bə-rabərlikləri ödənilir, ona görə də $d\vec{r}$ vektorunun istiqaməti baş istiqa-mətdir.

(11) düsturuna *Rodriq düsturu* deyilir. M nöqtəsində baş istiqa-mətlər üzrə normal əyrilikl[redacted] bu nöqtədə *səthin baş əyrilikləri* deyilir. Buradan aydın olur ki, Rodriq teoremindəki k ədədi M nöqtəsində $d\vec{r}$ baş istiqaməti üzrə baş əyrilikdir. Səthin baş əyriliklərini k_1 və k_2 ilə işarə edirlər.

3. Rodriq düsturunu açıq şəkildə yazaq:

$$\vec{n}_u du+\vec{n}_v dv=-k(\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv). \tag{12}$$

(12) bərabərliyinin hər iki tərəfini əvvəlcə $\vec{r}_u$, sonra isə $\vec{r}_v$ vek-toruna skalyar vuraq:

$$\begin{aligned}\vec{n}_u\vec{r}_u du+\vec{n}_v\vec{r}_u dv&=-k(\vec{r}_u^{\,2}du+\vec{r}_v\vec{r}_u dv),\\ \vec{n}_u\vec{r}_v du+\vec{n}_v\vec{r}_v dv&=-k(\vec{r}_u\vec{r}_v du+\vec{r}_v^{\,2}dv).\end{aligned} \tag{13}$$

Əgər bu bərabərliklərdə birinci və ikinci kvadratik forma əmsallarının hesablanması düsturlarını nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$k=\frac{h_{11}du+h_{12}dv}{g_{11}du+g_{12}dv},\quad k=\frac{h_{21}du+h_{22}dv}{g_{21}du+g_{22}dv}. \tag{14}$$

(14) bərabərliklərinin müqayisəsi göstərir ki,

$$\frac{h_{11}du+h_{12}dv}{g_{11}du+g_{12}dv}=\frac{h_{21}du+h_{22}dv}{g_{21}du+g_{22}dv},$$

və ya

$$\begin{vmatrix} h_{11}du+h_{12}dv & g_{11}du+g_{12}dv \\ h_{21}du+h_{21}dv & g_{21}du+g_{22}dv \end{vmatrix}=0. \tag{15}$$

(15) tənliyi baş istiqamətləri təyin edən tənlikdir. Bu tənliyin aşağıdakı yazılış formasından da istifadə olunur:

$$\begin{vmatrix} (dv)^2 & -dudv & (du)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix}=0. \tag{16}$$

Əgər səth üzərindəki γ xəttinin hər bir $M\in\gamma$ nöqtəsində toxu-nanının istiqaməti bu nöqtədə baş istiqamət olarsa, onda γ xəttinə *əyrilik xətti* deyilir. Tərifdən aydın olur ki, səthin istənilən qeyri-ombilik M nöqtəsindən bu nöqtədəki istiqamətləri ortoqonal və qoşma olan iki əyrilik xətti keçir. Aşkardır ki, (16) *tənliyi əyrilik xətlərinin diferensial tənliyidir.* Əgər F

səthi üzərində u,v koordinat şəbəkəsi əyrilik xətlə-rindən ibarətdirsə, onda $g_{12}=0$ (u və v xətləri hər bir $M\in F$ nöqtə-sində ortoqonal olduqlarına görə) və $h_{12}=0$ (u və v xətlərinə toxu-nanlar hər bir M nöqtəsində Düpen indikatrisasına nəzərən qoşma olduqlarına görə).

4. (16) tənliklərini aşağıdakı kimi yazaq:

$$\begin{aligned}(h_{11}-kg_{11})du+(h_{12}-kg_{12})dv=0,\\(h_{21}-kg_{21})du+(h_{22}-kg_{22})dv=0.\end{aligned}\tag{17}$$

Göründüyü kimi, (17) sistemi məchulları du və dv olan iki xətti bircins tənliklər sistemidir. $d\vec{r}\neq\vec{0}$ olduğuna görə, (17) sisteminin sıfır-dan fərqli həlli vardır, ona görə də bu sistemin determinantı sfra bəra-bərdir:

$$\begin{vmatrix}h_{11}-kg_{11} & h_{12}-kg_{12}\\ h_{21}-kg_{21} & h_{22}-kg_{22}\end{vmatrix}=0,$$

və ya

$$(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)k^2-(g_{11}h_{22}-2g_{12}h_{12}+g_{22}h_{11})k+(h_{11}h_{22}-h_{12}^2)=0.\tag{18}$$

Beləliklə, $M\in F$ nöqtəsində k_1,k_2 baş əyrilikləri (18) kvadrat tənliyinin kökləridir.

Baş əyriliklərin $H=\dfrac{k_1+k_2}{2}$ ədədi ortasına $M\in F$ nöqtəsində *səthin orta əyriliyi* deyilir. Baş əyriliklərin $K=k_1k_2$ hasili isə $M\in F$ nöqtəsində *səthin tam* (və ya *Qauss*) *əyriliyi* adlanır.

(18) kvadrat təyliyindən Viyet teoreminə əsasən orta və tam əyriliklərin aşağıdakı ifadələri alınır:

$$H=\frac{g_{11}h_{22}-2g_{12}h_{12}+g_{22}h_{11}}{2(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)},\tag{19}$$

$$K=\frac{h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}.\tag{20}$$

$g_{11}g_{22}-g_{12}^2>0$ olduğuna görə (20) düsturundan müəyyən edirik ki, səthin elliptik nöqtələrində $K>0$, hiperbolik nöqtələrində $K<0$, parabolik nöqtələrində isə $K=0$ münasibəti ödənilir.

Mühazirə 20

SƏTHİN DAXİLİ HƏNDƏSƏSİ. TÖRƏMƏ DÜSTURLARI

1. Hamar *səthin daxili həndəsəsinə* bu səthin və onun üzərindəki fiqurların yalnız birinci kvadratik formanın köməyi ilə təyin olunan xassələri aid edilir. Mühazirə 17-dən məlum olur ki, səth üzərində qövs uzunluğunun, xətlər arasındakı bucağın və səth sahəsinin hesablanması ilə bağlı məsələlər səthin daxili həndəsəsinə aid olan məsələlərdir.

Səthin daxili həndəsəsinə aid olan digər məsələləri öyrənək. İlk növbədə səthin törəmə düsturlarını çıxaraq.

Tutaq ki, $F-C^k\,(k\geq 3)$ sinifindən olan hamar səth olub,

$$\vec{r}=\vec{r}(u^1,u^2)\tag{1}$$

tənliyi ilə verilmişdir. Hər bir $M\in F$ nöqtəsində

$$\vec{r}_1=\vec{r}_{u_1}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^1},\ \vec{r}_1=\vec{r}_{u_1}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^1},\ \vec{n}=\frac{[\vec{r}_1,\vec{r}_2]}{|[\vec{r}_1,\vec{r}_2]|}$$

vektorları xətti asılı olmayan vektorlardır. Ona görə də M nöqtəsində $R_M=M\vec{r}_1\vec{r}_2\vec{n}$ reperi (koordinat sistemi) təyin olunur. Bu reperin koordinat vektorları aşağıdakı kimi seçilir: $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ vektorları səth üzərində koordinat şəbəkəsinin u^1,u^2 xətlərinə M nöqtəsində toxunan vektorlardır, $\vec{n}$ isə vahid vektor olub, M nöqtəsində səthə toxunan müstəviyə ortoqonaldır və elə istiqamətlənmişdir ki, $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{n}$ vektorları müsbət oriyentasiyalı bazis əmələ gətirirlər.

$\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{n}$ bazisinin vektorlarının xüsusi törəmələrini, yəni

$$\vec{r}_{ij} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial u^j} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial u^i} = \vec{r}_{ji}, \quad \vec{n}_i = \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^i} \quad (i, j = 1,2)$$

vektorlarını bu bazisin vektorları üzrə ayırmaq mümkündür. Nəticədə aşağıdakı şəkildə olan düsturlar alınır:

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^1 \vec{r}_1 + \Gamma_{ij}^2 \vec{r}_2 + b_{ij}\vec{n} = \Gamma_{ij}^k \vec{r}_k + b_{ij}\vec{n}, \tag{2}$$

$$\vec{n}_i = b_i^1 \vec{r}_1 + b_i^2 r_2 = b_i^k \vec{r}_k. \tag{3}$$

Qeyd edək ki, (3) ayrılışında $\vec{n}$ vektorunun əmsalının sıfra bərabər olması $\vec{n}_i \perp \vec{n}$ şərti ilə bağlıdır.

2. (2) düsturundakı ayrılış əmsallarının ifadələrini edək. Əvvəlcə (2) bərabərliyinin hər iki tərəfini $\vec{n}$ vektoruna skalyar vuraq və $\vec{n} \perp \vec{r}_k, \vec{n}^2 = 1$ şərtlərini nəzərə alaq:

$$\vec{n}\vec{r}_{ij} = h_{ij} = \Gamma_{ij}^k (\vec{n}\vec{r}_k) + b_{ij}\vec{n}^2 = b_{ij},$$

və ya

$$b_{ij} = h_{ij}. \tag{4}$$

(4) bərabərliyindən göründüyü kimi, (2) düsturundakı b_{ij} əmsal-ları ikinci kvadratik forma əmsallarıdır.

Γ_{ij}^k ayrılış əmsallarını təyin etmək üçün (2) bərabərliyinin hər iki tərəfini $\vec{r}_l \quad (l = 1,2)$ vektoruna skalyar vuraq və $\vec{r}_k \vec{r}_l = g_{kl}$ olduğunu nə-zərə alaq (burada g_{kl} birinci kvadratik forma əmsallarıdır):

$$\vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_l = \Gamma_{ij}^k (\vec{r}_k \vec{r}_l) + h_{ij}(\vec{n}\vec{r}_l) = \Gamma_{ij}^k g_{kl}. \tag{4}$$

Digər tərəfdən, vektorların skalyar hasilinin diferensiallanması qayda-sına görə, yaza bilərik:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \partial_l g_{ij} = \partial_l (\vec{r}_i \vec{r}_j) = \vec{r}_{il} \cdot \vec{r}_j + \vec{r}_i \cdot \vec{r}_{jl}. \tag{5}$$

(5) bərabərliyinin sağ tərəfində (4)-ü nəzərə alaq:

$$\partial_l g_{ij} = \Gamma_{il}^k g_{kj} + \Gamma_{jl}^k g_{ki}. \tag{6}$$

(6) bərabərliyində l, i və j indekslərinin yerini ardıcıl olaraq iki dəfə dairəvi dəyişsək,

$$\partial_i g_{jl} = \Gamma_{ji}^k g_{kl} + \Gamma_{li}^k g_{kj}, \tag{7}$$

$$\partial_j g_{li} = \Gamma_{lj}^k g_{ki} + \Gamma_{ij}^k g_{kl}, \tag{8}$$

bərabərliklərini alarıq.

Aşkardır ki,

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \tag{9}$$

Doğrudan da, $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_{ji}$ bərabərliyində (2) düsturunu nəzərə almaqla yaza bilərik:

$$\Gamma_{ij}^k \vec{r}_k + h_{ij}\vec{n} = \Gamma_{ji}^k \vec{r}_k + h_{ji}\vec{n}. \tag{10}$$

$h_{ij} = h_{ji}$ olması səbəbindən (10) bərabərliyi

$$(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\vec{r}_k = \vec{0} \tag{11}$$

bərabərliyinə ekvivalentdir. $\vec{r}_k, k = 1,2$ vektorları kollinear olmadıqla-rından, (11) bərabərliyi (9) şərti daxilində ödənilir.

(7) və (8) bərabərliklərini tərəf-tərəfə toplayıb, alınmış bəra-bərlikdən (6) bərabərliyini çıxaq və bu zaman (9) şərtini nəzərə alaq:

$$\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} = \Gamma_{ji}^k g_{kl} + \Gamma_{li}^k g_{kj} + \Gamma_{lj}^k g_{ki} + \Gamma_{ij}^k g_{kl} -$$
$$- \Gamma_{il}^k g_{kj} - \Gamma_{jl}^k g_{ki} = 2\Gamma_{ij}^k g_{kl},$$

və ya

$$2\Gamma_{ij}^k g_{kl} = \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}. \tag{12}$$

$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$ olduğuna görə, birinci kvadratik forma əmsallarından düzələn $\|g_{kl}\|$ matrisinin tərsi vardır. Tərs matrisin elementlərini g^{lp} ilə işarə etsək, yaza bilərik:

$$g_{kl}g^{lp} = \delta_k^p \,, \tag{13}$$

burada δ_k^p Kroneker simvoludur.

(12) bərabərliyinin hər iki tərəfini g^{lp} elementlərinə vuraq və (13) şərtini nəzərə alaq:

$$2\Gamma_{ij}^k g_{kl}g^{lp} = 2\Gamma_{ij}^k \delta_k^p = 2\Gamma_{ij}^p = g^{lp}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}),$$

və ya

$$\Gamma_{ij}^p = \frac{1}{2} g^{lp}(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \tag{14}$$

(14) bərabərliyinin sağ tərəfi bəzi ədəbiyyatlarda II növ Kristoffel sim-volları adlandırılır və $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ şəklində işarə olunur. (14) bərabərliyinini sağ tərəfindəki mötərizənin daxilindəki ifadəyə isə I növ Kristoffel simvolu deyilir. (14) bərabərliyindən görünür ki, Γ_{ij}^k əmsallarının hesablanması daxili həndəsə məsələsidir.

(2) düsturu (4) və (14) şərtləri daxilində *Qauss düsturu* adlanır.

3. (3) dusturundakı b_i^k ayrılış əmsallarının hansı ifadəyə malik olduğunu araşdıraq. (3) bərabərliyinin hər iki tərəfini $\vec{r}_j$ vek-toruna skalyar vurub, $g_{kj} = \vec{r}_k \cdot \vec{r}_j$ və $h_{ij} = -\vec{n}_i \cdot \vec{r}_j$ olduğunu nəzərə, alsaq, yaza bilərik:

$$-h_{ij} = b_i^k g_{kj} \,. \tag{15}$$

(15) bərabərliyinin hər iki tərəfini g^{jl} komponentlərinə vuraq:

$$-h_{ij}g^{jl} = b_i^k g_{kj}g^{jl} = b_i^k \delta_k^l = b_i^l ,$$

və ya

$$b_i^l = -h_{ij}g^{jl} = -h_{i\cdot}^{l} = -h_i^l \,. \tag{16}$$

Qeyd edək ki, (16) bərabərliyində j indeksi qaldırılmışdır (bax, mühazirə 4, bənd 3). (3) və (16) bərabərliklərindən

$$\vec{n}_i = -h_i^k \vec{r}_k \tag{17}$$

düsturu alınır. (17) düsturuna *Veynharten düsturu* deyilir.

M nöqtəsi F səthi boyunca dəyişdikdə, R_M reper idə səth boyunca yerini dəyişir. Ona görə də R_M reperinə adətən səthin *hərəkətli reperi* deyilir. Qauss və Veynharten düsurlarına isə *F səthinin R_M hərəkətli reperinin törəmə düsturları* da deyilir.

4. İndi isə səthlər nəzəriyyəsinin əsas teormlərindən biri olan *Qauss teoremini* qeyd edək.

Teorem (Qauss). *$C^k\,(k \geq 3)$ sinifindən olan hamar səthin tam əyriliyi yalnız birinci kvadratik forma əmsalları və onların törəmələri ilə ifadə olunur.*

İsbatı.

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \vec{r}_k + h_{ij}\vec{n} \tag{18}$$

Qauss düsturu F hamar səthinin hər bir nöqtəsində ödənildiyinə görə, bu düsturu səth üzərində eynilik kimi qəbul edərək, u^1 və u^2 dəyişənlərinə görə diferensiallamaq olar. (18) bərabərliyini u^k $(k = 1,2)$ dəyişəninə görə diferensiallayıb, (17) bərabərliyini nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}_{ij}}{\partial u^k} &= \partial_k \partial_j \vec{r}_i = \partial_k(\Gamma_{ij}^s \vec{r}_s + h_{ij}\vec{n}) = \partial_k(\Gamma_{ji}^s \vec{r}_s + h_{ij}\vec{n}) = \partial_k \Gamma_{ji}^s \vec{r}_s + \Gamma_{ji}^s \partial_k \vec{r}_s + \\ &+ \partial_k h_{ij} + h_{ij}\partial_k \vec{n} == \partial_k \Gamma_{ji}^s \vec{r}_s + \Gamma_{ji}^s \Gamma_{sk}^l \vec{r}_l + \Gamma_{ji}^s h_{sk}\vec{n} + \partial_k h_{ij} - h_{ij}h_k^l \vec{r}_l . \end{aligned} \tag{20}$$

(20) bərabərliyinin sağ tərəfində $\vec{r}_l$ və $\vec{n}$ vektorlarının əmsallarını qrup-laşdıraq:

$$\partial_k \partial_j \vec{r}_i = (\partial_k \Gamma_{ji}^l + \Gamma_{ji}^s \Gamma_{sk}^l - h_{ij}h_k^l)\vec{r}_l + (\Gamma_{ji}^s h_{sk} + \partial_k h_{ij})\vec{n} \,. \tag{21}$$

Məlumdur ki, yüksək tərtib xüsusi törəmələrin alınması diferensiallama növbəsindən asılı deyil. Bu isə o deməkdir ki,

$$\partial_k \partial_j \vec{r}_i = \partial_j \partial_k \vec{r}_i \,. \tag{22}$$

(21) bərabərliyinə əsasən $\partial_j \partial_k \vec{r}_i$ xüsusi törəməsinin aşağıdakı analoji ifadəsini yaza bilərik:

$$\partial_j \partial_k \vec{r}_i = (\partial_j \Gamma_{ki}^l + \Gamma_{ki}^s \Gamma_{sj}^l - h_{ik} h_j^l)\vec{r}_l + (\Gamma_{ki}^s h_{sj} + \partial_j h_{ik})\vec{n} . \quad (23)$$

(22) bərabərliyində (21) və (22) ayrılışlarını nəzərə alıb, $\vec{r}_l$ vektorunun əmsallarını bərabərləşdirsək,

$$\partial_k \Gamma_{ji}^l - \partial_j \Gamma_{ki}^l + \Gamma_{ji}^s \Gamma_{sk}^l - \Gamma_{ki}^s \Gamma_{sj}^l = h_{ij} h_k^l - h_{ik} h_j^l \quad (24)$$

münasibətinə gəlmiş olarıq.

$$R_{kji}^l = \partial_k \Gamma_{ji}^l - \partial_j \Gamma_{ki}^l + \Gamma_{ji}^s \Gamma_{sk}^l - \Gamma_{ki}^s \Gamma_{sj}^l \quad (25)$$

şəklində işarələmə daxil etsək, (24) bərabərliyi belə yazılar:

$$R_{kji}^l = h_{ij} h_k^l - h_{ik} h_j^l . \quad (25)$$

(25) bərabərliyindən görünür ki, R_{kij}^l kəmiyyətləri II növ Kristoffel simvolları və onların törəmələri ilə ifadə olunurlar. Bu isə onu göstərir ki, R_{kij}^l kəmiyyətlərinin hesablanması səthin daxili həndəsəsinə aiddir. (25) bərabərliyinin hər iki tərəfini g_{lp} əmsallarına vursaq, yaza bilərik:

$$R_{kjip} = h_{ij} h_{kp} - h_{ik} h_{jp} . \quad (26)$$

(26) bərabərliyində $k = i = 1, j = p = 2$ qəbul etsək,

$$R_{1212} = {h_{12}}^2 - h_{11} h_{22} \quad (27)$$

bərabərliyini alarıq. Məlumdur ki, səthin tam əyriliyi

$$K = \frac{h_{11} h_{22} - {h_{12}}^2}{g_{11} g_{22} - {g_{12}}^2} \quad (28)$$

ifadəsinə malikdir (bax, mühazirə 19, bənd 4). (27) münasibətini (28)-də nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$K = \frac{-R_{1212}}{g_{11} g_{22} - {g_{12}}^2} . \quad (29)$$

(29) bərabərliyindən görünür ki, səthin tam əyriliyi yalnız birinci kvadratik forma əmsallarından və onların törəmələrindən asılıdır. ■

Mühazirə 21

DİFRENSİALLANAN ÇOXOBRAZLILAR

Tutaq ki hesabi bazası olan M hausdorf topoloji fəzası verilmişdir. Əgər M fəzasının hər bir nöqtəsinin R^n fəzasının oblastına homeomorf olan U ətrafı vardırsa, deyəcəyik ki, $M - n$-ölçülü çoxobrazlıdır. $\varphi : U \to \varphi(U) \subset R^n$ qeyd edilən homeomorfizm olduqda, (U, φ) cütü xəritə və ya lokal koor-dinat sistemi adlanır. Xəritə istənilən $x \in U$ nöqtəsinin

$$\varphi(x) = (u^1, ..., u^n)$$

koordinatlarını təyin etməyə imkan verir. Əgər xəritələrin hər bir cütünün kəsişməsində koordinatların

$$u^i = f^i\left(u^{1'}, ..., u^{n'}\right) \quad (4.1)$$

çevrilməsini təyin edən keçid funksiyaları C^k sinfindən hamar funksiyalardırsa, deyəcəyik ki, M çoxobrazlısı C^k sinfindən diferensiallanandır (və ya hamardır).

Çoxobrazlı üzərində v vektoru $x \in (U, \varphi)$ nöqtəsində verilmiş xəritəyə nəzərən n sayda $(v^1, ..., v^n)$ ədədlər sistemi ilə təyin olunur ki, bu ədədlər digər xəritəyə keçid zamanı vektor qanunu ilə çevrilirlər:

$$v^i = P_{i'}^i(x) v^{i'}, \quad P_{i'}^i = \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^{i'}}\right)_x .$$

Verilmiş nöqtədə təyin olunan bütün vektorlar çoxluğu $T_x M$ toxunan fəzasını əmələ gətirir. Vektorlara verilmiş nöqtənin ətrafında təyin olunmuş hamar funksiyalara

$$v(\varphi) = v^i(\partial_i \varphi)_x$$

qaydası ilə təsir edən (bax § 1) xətti diferensial operatorlar kimi baxılması məqsədəuyğundur. Hamar funksiyaların istənilən cütü üçün aşağıdakı xassələr doğrudur:

$$\begin{aligned} &\lambda, \mu \in R, \quad v(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda v(\varphi) + \mu v(\psi), \\ &v(\varphi\psi) = v(\varphi)\psi + \varphi v(\psi). \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Xüsusi halda, ∂_i vektorları xətti asılı olmayıb toxunan fəzanın təbii bazisini əmələ gətirirlər.

Tenzorlar cəbrinə analoji olaraq, təbii bazisi $\{du^i\}$ olan $T_x^* M$ kotoxunan fəzasının elementləri kimi kovektorlar və x nöqtəsində ixtiyari tipli tenzorlar, həmçinin M çoxobrazlısı üzərində vektor, kovektor və tenzor meydanları təyin edilə bilər.

Əgər M hamar çoxobrazlısının hər bir xəritəsi üçün koordinatların dəyişməsi zamanı (3.4) qanunu üzrə çevrilən $\Gamma^i_{jk}(x)$-hamar funksiyaları $-\nabla$ rabitəsinin əmsalları yığımı veri-lərsə, deyəcəyik ki, M afin (və ya xətti) rabitəli fəzadır. Bu halda (M, ∇) yazılışından istifadə olunur.

$$S^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} \qquad (4.3)$$

funksiyaları buruqluq tenzoru adlandırılan (1,2) tipli tenzor meydanının komponentləridir.

Misal 1. § 3-də baxılan rabitə buruqsuz afin rabitədir və onunla xarakterizə olunur ki, dekart koordinatlarda əmsalları sıfra bərabərdir. Bu rabitəyə afin fəzanın kanonik rabitəsi deyilir.

Tutaq ki, $t - (M, \nabla)$ fəzası üzərində (p, q) tipli tenzor meydanıdır. $t-$nin mütləq diferensialı dedikdə (U, φ) xəritə-sində lokal olaraq

$$\nabla t = \left(\nabla t^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}\right) du^{j_1} \otimes \cdots \otimes du^{j_q} \otimes \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_p} \qquad (4.4)$$

şəklində yazılan eyni tipli ∇t tenzor meydanı başa düşülür. ∇t tenzor meydanının koordinatları (3.13) düsturu ilə təyin olunurlar.

Tenzor meydanının $x \in M$ nöqtəsində v vektoru isti-qamətində kovariant törəməsi bu nöqtədə koordinatları

$$\nabla_v t^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = v^k \nabla_k t^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \qquad (4.5)$$

olan $\nabla_v t$ tenzoruna deyilir, burada $\nabla_k - (3.14)$ düsturu ilə təyin olunan operatordur.

Əgər $\gamma : I \to M -$ lokal olaraq $u^i = u^i(\sigma)$ parametrik tənlikləri ilə verilən hamar əyridirsə, onda

$$\frac{\nabla t}{d\sigma} = \frac{du^k}{d\sigma} \nabla_k t \qquad (4.6)$$

t tenzor meydanının γ əyrisi boyunca kovariant törəməsi adla-nır. Analoji qayda ilə (M, ∇) fəzası üzərində verilən vektor meydanı istiqamətində kovariant törəmə təyin edilə bilər. Xüsusi halda, təbii bazisin vektorları üçün

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k . \qquad (4.7)$$

x nöqtəsində v_0 vektoru verildikdə əyrinin ixtiyari nöqtəsində bu vektora paralel olan $v(\sigma)$ vektorunun tapılması

$$\frac{dv^k}{d\sigma} + \Gamma^k_{ij}\left(u^s(\sigma)\right) \frac{du^i}{d\sigma} v^j = 0 \qquad (4.8)$$

adi diferensial tənliklər sisteminin inteqrallanmasına gətirilir (nəzərdə tutulur ki, γ əyrisi bir xəritənin təsir dairəsində yerləşir).

Məlum olduğu kimi, verilmiş başlanğıc şərtlər daxilində (4.8) sisteminin yeganə həlli var. Analoji qayda ilə əyri boyunca tenzorun paralel köçürülməsi təyin olunur.

(M, ∇) afin rabitəli fəzasında verilmiş γ əyrisini götürək. Əgər γ əyrisinin müəyyən kanonik $u^i = u^i(s)$ para-metrizasiyasında τ toxunan vektoru onun özü boyunca paralel köçürülərsə, yəni

$$\frac{\nabla \tau}{ds}=0$$

olarsa, deyəcəyik ki, γ geodezik xətdir. Aydındır ki, bu halda $u^i(s)$ funksiyaları aşağıdakı 2-ci tərtib adi diferensial tənliklər sistemini ödəməlidirlər:

$$\frac{d^2u^i}{ds^2}+\Gamma_{ij}^k\left(u^s\right)\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}=0. \qquad (4.9)$$

<u>Misal 2.</u> Tutaq ki, (M,∇)=A^n – kanonik rabitəli afin fəzadır (bax misal 1). Hamar əyri boyunca vektorun paralel köçürülməsi ənənəvi qayda üzrə aparılır: onun dekart kompo-nentləri sabit olmalıdırlar. Doğrudan da, dekart koordinatlarda $\Gamma_{ij}^k=0$ və vektorun (4.8) paralel köçürülməsi şərti $\frac{dv^i}{d\sigma}=0$ şək-lində yazılır, buradan $v^i=const$ olması alınır. Kanonik rabitə-nin geodezik xətləri düz xətlərdir. Doğrudan da, dekart koor-dinatlarda (4.9) tənlikləri

$$\frac{d^2u^k}{ds^2}=0$$

şəklində yazılır və buradan aşağıdakılar alınır:

$$u^k=a^ks+b^k, \quad a^k, b^k=const.$$

Mühazirə 22

DİFRENSİALLANAN ÇOXOBRAZLI ÜZƏRİNDƏ TENZOR MEYDANLARI

Tutaq ki, $V-K$ meydanı üzərində vektor fəzadır və A- $A,B,C,...$ elementlərinə malik olan çoxluqdur. A çoxluğunun elementlərini nöqtələr adlandıraq. Əgər hər bir nizamlanmış $(A,B)\in$ A×A elementlər cütünə aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi ilə $v=\overrightarrow{AB}\in V$ vektorunu qarşı qoyan A×A $\to V$ inikası verilərsə, deyəcəyik ki, A– K meydanı üzərində afin fəzadır:

1) İstənilən $A\in$ A nöqtəsi və istənilən $v\in V$ vektoru üçün elə yeganə $B\in$ A nöqtəsi vardır ki, $v=\overrightarrow{AB}$.

2) İstənilən $A,B,C\in$ A nöqtələri üçün Şall münasibəti doğrudur:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0.$$

$\dim V=n$ olduqda afin fəza $n-$ölçülü qəbul olunur və A^n kimi işarə edilir. $V-$ A^n afin fəzası üçün yönəldici vektor fəza adlandırılır.

İxtiyari qaydada seçilmiş $O\in$ A nöqtəsini qeyd edək. Bu halda $\forall A\in$ A nöqtəsi üçün bu nöqtənin radius-vektoru adlandı-rılan $x=\overrightarrow{OA}$ vektoru birqiymətli təyin olunur. $V-$də $\{e_i\}$ bazi-sini seçməklə $x=x^ie_i$ ayrılışını alarıq. x^i ədədlərinə $A(x)$ nöqtə-sinin $\{O,e_i\}$ reperində afin (və ya dekart) koordinatları deyilir.

V yönəldici vektor fəzası psevdo-Evklid vektor fəzası ol-duqda A – afin-psevdo-Evklid (və ya psevdo-Evklid) fəzası adlandırılır.

A^n afin fəzasının nöqtəsində T_x toxunan fəzası başlanğı-cı bu nöqtədə olan bütün vektorların əmələ gətirdiyi eyni ölçülü
vektor fəzadır. Müxtəlif nöqtələrdəki toxunan fəzalar öz araların-da paralel köçürmə vasitəsilə təbii olaraq eyniləşdirilə bilər.

$U\in$ A^n oblastını nəzərdən keçirək. Əgər U oblastının hər bir nöqtəsinə bu nöqtədəki toxunan fəzada (p,q) tipli tenzo-ru qarşı qoyan $x\to t_x$ inikası verilərsə, deyəcəyik ki, U oblastın-da (p,q) tipli t tenzor meydanı verilmişdir. Başqa sözlə, bu hal-da arqumentləri T_x

və T_x^* fəzalarından olan və həm də nöqtənin seçimindən asılı olan polixətti funksiyaya baxılır. Məsələn, $p=1$,

$q=2$ olduqda $t_x(\xi,u,v)$ polixətti funksiyası təyin olunur. Əgər $\{O,e_i\}-$ A^n-də dekart reperdirsə, onda

$$t_x = t^i_{jk}\left(x^1,...,x^n\right)\xi_i u^j v^k \,. \qquad (1.1)$$

U oblastında verilmiş $t^i_{jk}(x)$ funksiyalarına tenzor meydanının koordinatları deyilir. Əgər $t^i_{jk}(x)$ funksiyaları C^k sinfindən olan hamar funksiyalardırsa, deyəcəyik ki, $t-C^k$ sinfindən olan ha-mar tenzor meydanıdır. $t^i_{jk}=const$ olduqda , tenzor meydanı sabit tenzor meydanı adlanır.

Tenzorlar üzərində aparılan əməllər təbii olaraq nöqtələr üzrə aparılmaqla tenzor meydanlarına tətbiq edilir. Məsələn, eyni tipli t və s tenzorları üçün toplama əməli

$$(t+s)_x = t_x + s_x$$

şəklində aparılır.

Tenzor meydanları üzərində yeni bir əməl- diferensialla-ma əməli də aparılır. Polixətti funksiyanın diferensialını hesabla-dıqda nəzərə almaq lazımdır ki, dekart reperi halında vektor və kovektor arqumentlərinin koordinatları nöqtənin seçimindən asılı deyil. Məsələn, (1,1) tenzoru üçün

$$dt = dt^i_{jk}(x)\xi_i u^j v^k \,. \qquad (1.2)$$

Beləliklə, $dt-(1,2)$ tipli tenzor meydanıdır, dt^i_{jk} diferensialları onun dekart reperə nəzərən koordinatlarıdır.

Misal 1. A^n-də nöqtələrin radius-vektorlarının meydanı-na baxaq. Dekart reperə nəzərən $x=x^i e_i$ ayrılışını yaza bilərik. Diferensiallamaqla, koordinatları $dx^i=e^i(dx)$ olan $dx=dx^i e_i$ vektor meydanını alarıq.

Diferensialların aşağıdakı xassələri doğrudur:

a) Tenzor meydanının diferensialının sıfra bərabər olması üçün zəruri və kafi şərt onun sabit olmasıdır (istənilən dekart reperdə $t^i_{jk}=const$ olmasıdır);

b) Tenzor meydanlarının cəminin diferensialı onların dife-rensialları cəminə bərabərdir: $d(t+s)=dt+ds.$

c) Tenzor hasilinin diferensialı Leybnis qaydası ilə hesab-lanır: $d(t\otimes s)=dt\otimes s+t\otimes ds.$ Əgər xüsusi halda, $t-$ədəddirsə, onda $d(ts)=tds.$

d) Bükülmə əməli diferensiallama əməli ilə yerini dəyişə bilər:

$$tr^k_m(dt)=d\left(tr^k_m t\right)$$

Tenzor meydanının koordinatlarının diferensiallarını xü-susi törəmələrlə ifadə etməklə alarıq:

$$dt=\partial_s t^i_{jk}\xi_i u^j v^k dx^s, \qquad \partial_s t^i_{jk}=\frac{\partial t^i_{jk}}{\partial x^s}. \qquad (1.3)$$

Misal 1-i nəzərə almaqla belə bir nəticəyə gəlirik ki, $\partial_s t^i_{jk}$ funksi-yaları (1,3) tipli tenzor meydanının koordinatlarıdır. Bu tenzor meydanı t tenzor meydanının törəməsi adlanır və ∂t kimi işarə olunur. Ümumi halda (p,q) tipli tenzor meydanının törəməsi $(p,q+1)$ tipli tenzor meydanıdır. Törəməni verilmiş $w=w^i(x)e_i$ vektor meydanı ilə diferensiallama indeksi üzrə bükməklə yeni-dən (p,q) tipli

$$\partial_w t = tr^1_1(w\otimes\partial t) \qquad (1.4)$$

tenzor meydanını alarıq. $\partial_w t-w$ vektor meydanı istiqaməti üzrə törəmə adlanır. Məsələn, $\partial_w t^i_{jk}=w^s\partial_s t^i_{jk}.$

Misal 2. Tutaq ki, $\varphi(x^1,...,x^n) - U \subset A^n$ oblastında təyin olunmuş skalyar meydandır. Onda $\partial_s\varphi - grad\varphi$ kimi işarə olu-nan və φ meydanının qradiyenti adlandırılan kovektor meydanı-nın koordinatlarıdır. Əgər yönəldici vektor fəza psevdo-Evklid fəzasıdırsa, onda indeksi qaldırmaqla, koordinatları ilə aşağıdakı kimi ifadə olunan vektor meydanını alarıq:

$$grad\varphi = \left(g^{ij}\partial_j\varphi\right)e_i.$$

φ potensial funksiya, $grad\varphi$ isə potensial vektor meydanı adlanır. İstiqamət üzrə törəmə skalyar hasilin köməyi ilə ifadə oluna bilər:

$$\partial_w\varphi = w^i(x)\partial_i\varphi = g(w, grad\varphi).$$

Misal 3. Tutaq ki, $\xi -$kovektor meydanıdır. $\partial\xi$ törəmə-sinin alternasiyasını aparaq və nəticəni 2-yə vuraq:

$$rot\xi = 2\cdot Al(\partial\xi).$$

$rot\xi -$koordinatları $S_{ij} = \partial_i\xi_j - \partial_j\xi_i$ olan tenzor meydanıdır və ξ kovektor meydanının rotasiyası adlanır.

Misal 4. Tutaq ki, $v -$vektor meydanıdır. Onun törəməsi koordinatları $\partial_j v^i$ olan $(1,1)$ tipli tenzor meydanıdır. Bu tenzor meydanının $tr(\partial v)$ izi $v -$nin divergensiyası adlandırılan invariantdır. Psevdo-Evklid fəzada divergensiyanı

$$div\, v = \partial_i v^i = g^{ij}\partial_i v_j$$

şəklində yaza bilərik. Bu invariant sıfra bərabər olduqda $v -$ solenoidal vektor meydanı adlanır.

Tutaq ki, $v - U \subset A^n$ oblastında təyin olunmuş vektor meydanıdır. $v -$nin inteqral xətləri (və ya trayektoriyaları) dedikdə toxunan vektorları meydanın vektorları ilə üst-üstə dü-şən, yəni $\frac{dx}{dt} = v(x(t))$ münasibətini ödəyən $x = x(t)$ parametri-zasiya olunmuş əyriləri başa düşülür. Bu münasibəti koordinat-larla yazmaqla,

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i\left(x^1(t),...,x^n(t)\right) \qquad (1.5)$$

adi diferensial tənliklər sistemini alarıq. (1.5) sisteminin inteq-rallanması inteqral xətlərini təyin etməyə imkan verir.

Əgər $u, v -$verilmiş vektor meydanlarıdırsa, onda istiqa-mət üzrə törəmələrin

$$w = [u, v] = \partial_u v - \partial_v u \qquad (1.6)$$

fərqi yeni vektor meydanıdır. $[u,v]-$yə u və v vektor meydan-larının kommutatoru deyilir. $[u,v]$ kommutatorunun koordinat-ları aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$[u,v]^i = w^i = u^k\partial_k v^i - v^k\partial_k u^i.$$

Misal 5. Tutaq ki, vektor meydanı dekart koordinatlarda $v = x^1e_1 + x^2e_2$ ayrılışına malikdir. İnteqral xətlərini təyin edək. Bundan ötrü

$$\frac{dx^1}{dt} = x^1, \qquad \frac{dx^2}{dt} = x^2$$

diferensial tənliklər sistemini inteqrallayaq. Nəticədə $x^1 = c_1e^t$, $x^2 = c_2e^t$ və ya parametri yox etməklə $c_2x^1 - c_1x^2 = 0$ düz xətlər dəstəsini alarıq.

Misal 6. Müstəvi üzərində koordinatları ilə verilən $u = (x^1, x^2), v = (1, x^1)$ vektor meydanlarının kommutatorunu tə-yin edək. Bu məqsədlə matris yazılışından istifadə etmək əlveriş-lidir. Beləliklə, aşağıdakıları yaza bilərik:

$$\begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 v^1 & \partial_2 v^1 \\ \partial_1 v^2 & \partial_2 v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \partial_1 u^1 & \partial_2 u^1 \\ \partial_1 u^2 & \partial_2 u^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

və ya

$$[u, v] = -e_1.$$

Qeyd edək ki, A^n fəzasında vektor meydanları xətti dife-rensial operatorlar kimi baxıla bilər:

$$v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n} = v^i \partial_i.$$

Bu halda bazis vektorları xüsusi diferensiallama operatorları ilə eyniləşdirilir: $e_i = \partial_i$. Vektor meydanının diferensiallanan φ funksiyasına təsiri $v(\varphi) = v^i(x)\partial_i \varphi$ funksiyasını təyin etmiş olur. Bu funksiya $\varphi -$nin v vektor meydanı istiqaməti üzrə törəməsi-dir: $v(\varphi) = \partial_v \varphi.$